МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ РЕКУРЕНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ N-го ПОРЯДКУ

(за редакцією В. М. Мітіна)

Навчальний посібник
для студентів напрямків підготовки
«Прикладна математика» та «Комп’ютерні науки»

Рекомендовано вченою
радою НТУ «ХПІ»
протокол № 10 від 22.12.2018

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

УДК 512
С 32

Рецензенти

О. Г. Нерух, доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки;
О. Г. Ніколаєв, доктор фізико-математичних наук, професор, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «ХАІ»

Рекомендовано вченою радою НТУ «ХПІ»
як навчальний посібник для студентів напрямків підготовки «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки»,
протокол № 10 від 22.12.2018 р.

Сердюк І.В.

С 32 Використання методу рекурентних співвідношень для обчислення визначників n-го порядку : навчальний посібник для студентів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, — Харків : «НТМТ», 2019. — 174 с.

ISBN 978-617-578-296-5

Розглянуто методи обчислення визначників які не входять до базової програми курсу лінійної алгебри. Більшість представленого матеріалу відноситься до завдань підвищеної складності. Містить достатню кількість теоретичного матеріалу, докладно розв'язано приклади, подано вправи для самостійної роботи з відповідями.

Призначено для студентів напрямків підготовки «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки», інших технічних спеціальностей.

Бібліогр. 15

УДК 512

ISBN 978-617-578-296-5

ЗМІСТ

Вступ

Даний посібник є логічним продовженням навчального посібника «Теорія визначників. Методи обчислення визначників n-го порядку». Посібник призначається для тих студентів технічних спеціальностей, хто готовий з нами далі більш глибоко зануритися в світ математичних формул. Протягом останніх років в технічних університетах України відбуваються зміни програм математичних курсів. Крім того, спостерігається зростання різноманітності програм за різними спеціальностями одного напряму. Зокрема, значно розрізняються програми з курсу «Лінійна алгебра» для студентів спеціальностей «Комп'ютерні науки» та «Прикладна математика», серед якої є групи посиленої математичної підготовки. Зміни, що відбуваються, пов'язані з необхідністю наближення до потреб інженерних дисциплін. Але, водночас, ці зміни повинні зберігати високий рівень математичних знань. Як і в попередньому посібнику, увагу приділено темам, які недостатньо представлені або зовсім відсутні в програмах цих курсів. В даному посібнику автори пропонують розглянути застосування методу рекурентних співвідношень до обчислення визначників. Викладено методи розв'язання задач та основні теоретичні відомості, наведено приклади розв'язання задач підвищеної складності. Метою цього посібника є підвищення математичної культури у студентів.

Крім того, з метою популяризації математики серед студентів університетів регулярно в багатьох країнах проводяться математичні олімпіади. Математичні олімпіади відіграють значну роль в пропаганді математичних знань, в підвищенні мотивації студентів до навчання. Їх основне завдання є крок в ланцюзі заходів, покликаних виявити студентів, здатних до творчого мислення, і звернути на них увагу спеціальних кафедр. Оскільки, оволодіння різними математичними методами і прийомами логічних міркувань є корисним не тільки при підготовці до олімпіади, а й в серйозних наукових дослідженнях, в яких застосовується математичний апарат. А як відомо, оволодіти математичним апаратом можна лише навчившись розв'язувати завдання різного рівня складності. У зв'язку з цим матеріал підібраний так, що він може бути використаний для занять зі студентами, які беруть участь в різного рівня олімпіадах з математики та програмування.

Як відомо, кращий спосіб розібратися в тій чи іншій ідеї — це розібрати розв'язану задачу і потім розв'язати самому задачу, в якій використовується ця ідея. Цьому сприяє зміст і структура посібника. Введені математичні поняття і методи розв'язування задач проілюстровано численними прикладами. Подано достатню кількість вправ для самостійної роботи з відповідями. Приклади розміщено в такій послідовності, щоб вони глибше та повніше розкривали теорію, сприяли формуванню точного математичного мислення.

Підготовка студентів з поглибленим рівнем навчання розділів вищої математики вимагає великих зусиль як для студентів, так і для викладачів. Щоб було зручно працювати треба мати значний запас завдань. Тому автори включили розділ, який містить набір обчислених визначників, записаних в загальному вигляді. Підстановка різних числових значень замість параметрів дає можливість складати необхідну кількість різних завдань для роботи над будь-яким способом обчислень.

Навчальний матеріал збирався авторами з багатьох посібників та доповнювався самостійними розробками. Ми сподіваємося, що цей посібник займе гідне місце в підготовці «сильних» студентів різних технічних спеціальностей.

Автори користуються нагодою, щоб висловити свою подяку доценту кафедри комп'ютерної математики і аналізу даних Мітіну Володимиру Миколайовичу за корисні поради, які сприяли поліпшенню змісту і структури посібника.

§ 1. Метод рекурентних співвідношень

Для обчислення визначників $n-$го порядку часто використовують *метод рекурентних співвідношень.* Метод полягає у тому, щоб даний визначник D_n виразити через визначники того ж вигляду, але більш низького порядку $D_{n-1},\cdots,D_{n-k}$. Отримується це співвідношення перетворенням визначника та розкладанням його за елементами рядка (стовпця). При цьому використовують основні властивості визначників.

Отримане рекурентне співвідношення $k-$го порядку, як правило, є лінійним і розв'язаним відносно D_n:

$$D_n = p_1(n)D_{n-1} + \cdots + p_k(n)D_{n-k} + q(n), \quad k < n. \tag{1.1}$$

Розв'язком рекурентного співвідношення (1.1) називають таку функцію незалежної змінної n

$$D_n = f\left(n\right),$$

яка при підставлянні в (1.1) перетворює співвідношення в тотожність для всіх значень $n \in \mathbb{N}$.

Рівності

$$D_1 = a_1,\cdots,D_k = a_k \tag{1.2}$$

називаються *початковими умовами*.

Задача визначення розв'язку рекурентного співвідношення (1.1), який задовольняє початковим умовам (1.2), називається *задачею Коші.*

Задача Коші рекурентного співвідношення першого порядку:

$$\begin{cases} D_n = p\left(n\right)D_{n-1} - q\left(n\right); \\ D_1 = a. \end{cases} \tag{1.3}$$

Теорема 1.1.

Якщо задача Коші (1.3) має розв'язок, то він єдиний.

Приклад 1.01.

Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми двох визначників} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{спільний множник } b_n \\ \text{першого стовпця} \\ \text{виносимо за знак} \\ \text{визначника} \end{array} \right| = a_n \cdot D_{n-1} + b_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 1 & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 1 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$
=\left|\begin{array}{l}\text{елементарні перетворення}\\ \text{зі стовпцями}\\ II-a_{n-1}\cdot I\to II\\ III-a_{n-2}\cdot I\to III\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ N-a_1\cdot I\to N\end{array}\right|=a_n\cdot D_{n-1}+b\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b_{n-1}-a_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & b_{n-1}-a_{n-1} & b_{n-2}-a_{n-2} & \cdots & b_1\end{vmatrix}=
$$

$$
=a_n\cdot D_{n-1}+\prod_{m=1}^{n}b_m\ .
$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші: $\begin{cases}D_n=a_n\cdot D_{n-1}+\prod\limits_{m=1}^{n}b_m;\\ D_1=a_1+b_1.\end{cases}$.

З іншого боку

$$
\Delta_n=\begin{vmatrix}a_n+b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0\\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{запишемо даний}\\ \text{визначник у вигляді}\\ \text{суми двох визначників}\end{array}\right|=
$$

$$
=\begin{vmatrix}a_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0\\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0\\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1\end{vmatrix}=
$$

$$
=a_n\cdot\Delta_{n-1}+\begin{vmatrix}b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0\\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1\end{vmatrix}=
$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{проведемо послідовно серію} \\ \text{елементарних перетворень} \\ II - I \to II \\ III - II \to III \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ < N > - < N - I > \to < N > \end{array} \right| =$$

$$= a_n \cdot \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \end{vmatrix} = a_n \cdot \Delta_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} b_m \, .$$

Варіанта Δ_n є розв’язком задачі Коші $\begin{cases} \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} b_m ; \\ \Delta_1 = a_1 + b_1 . \end{cases}$

Таким чином, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

1.01.01.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b_{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b_{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & b_{n-2} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

\# $D_n = \left(1 - a b_{n-1}\right) \cdot D_{n-1}$.

1.01.02.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ n & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ n & n-1 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ n & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 0 & n-1 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} .$$

\# $D_n = \left(1 - 2n\right) \cdot D_{n-1}$

1.01.03.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5^2 & \cdots & 5^{n-1} \\ 3n & 1 & 5 & \cdots & 5^{n-2} \\ 3n & 3\cdot(n-1) & 1 & \cdots & 5^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3n & 3\cdot(n-1) & 3\cdot(n-2) & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ 5n & 1 & 3 & \cdots & 3^{n-2} \\ 5n & 5\cdot(n-1) & 1 & \cdots & 3^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5n & 5\cdot(n-1) & 5\cdot(n-2) & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (1-15n)\cdot D_{n-1}$.

1.01.04.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = n+1,$$

$$\begin{vmatrix} 3n & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n+1 & 3n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n+1 & n & 3n-6 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3n & 2n-3 & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & 3n-3 & 2n-5 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 3n-6 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (2n-1)\cdot D_{n-1} + (n+1)!$.

1.01.05.

$$a_n = n+1, \quad b_n = n,$$

$$\begin{vmatrix} 2n+1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ n & 2n-1 & n-1 & \cdots & 2 \\ n & n-1 & 2n-3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 2n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (n+1)\cdot D_{n-1} + n!$.

1.01.06.

$$a_n = n^2 + n, \quad b_n = n+1,$$

$$\begin{vmatrix} (n+1)^2 & n^2-n & n^2-3n+2 & \cdots & 2 \\ n+1 & n^2 & n^2-3n+2 & \cdots & 2 \\ n+1 & n & (n-1)^2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n+1)^2 & n^2-n & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & n^2 & n^2-3n+2 & \cdots & 0 \\ 0 & n & (n-1)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

$D_n = (n^2+n)\cdot D_{n-1} + (n+1)!.$

1.01.07.

$$a_n = a^n, \quad b_n = b^n,$$

$$\begin{vmatrix} a^n+b^n & a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & a \\ b^n & a^{n-1}+b^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & a \\ b^n & b^{n-1} & a^{n-2}+b^{n-2} & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^n+b^n & a^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b^n & a^{n-1}+b^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b^{n-1} & a^{n-2}+b^{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

.

$D_n = a^n \cdot D_{n-1} + b^{\frac{m\cdot(n+1)}{2}}$.

Спочатку розглянемо метод розв'язування визначників, для яких можна скласти рекурентне співвідношення вигляду $D_n = p(n)\cdot D_{n-1}$ – *однорідне рекурентне співвідношення першого порядку*. Припустивши, що $D_1 = c$, і застосувавши метод математичної індукції, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&D_1 = c,\\
&D_2 = p(2)\cdot D_1 = p(2)\cdot c,\\
&D_3 = p(3)\cdot D_2 = p(3)\cdot p(2)\cdot c,\\
&\qquad \cdots\\
&D_{n-1} = c\cdot\prod_{m=2}^{n-1} p(m),\\
&D_n = p(n)\cdot\left(c\cdot\prod_{m=2}^{n-1} p(m)\right) = c\cdot\prod_{m=2}^{n} p(m).
\end{aligned}
$$

Приклад 1.02.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 1 & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}.
$$

Розв'язання

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 1 & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \left| I - III \to I \right| = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 1 & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1-a)D_{n-1}.
$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$
\begin{cases} D_1 = 1; \\ D_n = (1-a)D_{n-1}. \end{cases}
$$

Використовуючи припущення індукції, остаточно виводимо

$$D_2 = (1-a)D_1 = (1-a)\cdot 1;$$
$$D_3 = (1-a)D_2 = (1-a)^2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_n = (1-a)^{n-1}.$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

<table>
<tr>
<td>

1.02.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-1)^{n-1}$.

</td>
<td>

1.02.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_n = -(n-1)D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

</td>
</tr>
</table>

При використанні наступних прав треба враховувати, що отримане рекурентне співвідношення справедливе тільки при $n > 2$.

1.02.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -D_1 = -1, \end{matrix}$, При $(n > 2)$, $D_n = -2D_{n-1}$, $D_n = (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}$.

1.02.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & 3 & \cdots & 2n-3 \\ 5 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 1 & 2n-5 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -2D_1 = -2, \end{matrix}$, При $(n > 2)$, $D_n = -4D_{n-1}$,

$D_n = (-1)^{n-1} \cdot 4^{n-2} \cdot 2$.

1.02.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & -2 & \cdots & (-2)^{n-2} \\ 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-2)^{n-1} & 1 & (-2)^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 3D_1 = 3. \end{matrix}$ При $(n > 2)$, $D_n = -3D_{n-1}$,

$D_n = (-1)^{n-2} \cdot 3^{n-2} \cdot 3$.

1.02.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & (n-1)! \\ 6 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n! & 1 & (n-2)! & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -D_1 = -1. \end{matrix}$ При $(n > 2)$, $D_n = -5D_{n-1}$, $D_n = (-1)^{n-1} \cdot 5^{n-2}$.

1.02.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \cdots & \sqrt{n-1} \\ \sqrt{3} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{n} & 1 & \sqrt{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -\left(\sqrt{2}-1\right). \end{matrix}$,

При $(n > 2)$, $D_n = -\left(\sqrt{3}-1\right)D_{n-1}$, $D_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)^{n-2} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)$.

Співвідношення

$$D_n = p(n) \cdot D_{n-1} + q(n) \qquad (1.4)$$

називається *неоднорідним рекурентним співвідношенням першого порядку*.

Метод розв’язування рекурентного співвідношення (1.4) такий . Припустивши, що $D_n = Z_n \prod_{m=2}^{n} p(m)$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення

$$Z_n \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m) = p(n) \cdot Z_{n-1} \cdot \prod_{m=2}^{n-1} p(m) + q(n),$$

$$Z_n \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m) = Z_{n-1} \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m) + q(n) \Big| \quad \div \prod_{m=2}^{n} p(m),$$

$$Z_n = Z_{n-1} + \frac{q(n)}{\prod_{m=2}^{n} p(m)}.$$

Розв’яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} Z_n = Z_{n-1} + \dfrac{q(n)}{\prod\limits_{m=2}^{n} p(m)}, \\ Z_1 = D_1. \end{cases}$$

$$Z_2 = Z_1 + \frac{q(2)}{p(2)} = D_1 + \frac{q(2)}{p(2)},$$

$$Z_3 = Z_2 + \frac{q(3)}{\prod\limits_{m=2}^{3} p(m)} = D_1 + \frac{q(2)}{p(2)} + \frac{q(3)}{p(2)p(3)},$$

$$Z_4 = Z_3 + \frac{q(4)}{\prod\limits_{m=2}^{4} p(m)} = D_1 + \frac{q(2)}{p(2)} + \frac{q(3)}{p(2)p(3)} + \frac{q(4)}{p(2)p(3)p(4)},$$

……………………………,

$$Z_n = D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod\limits_{m=2}^{k} p(m)}.$$

Остаточно маємо

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{q(k)}{\prod\limits_{m=2}^{k} p(m)} \right).$$

Приклад 1.03.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{запишемо даний} \\ \text{визначник у вигляді} \\ \text{суми двох визначників} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= b_n \cdot D_{n-1} + \begin{vmatrix} a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{перший стовпець} \\ \text{віднімемо від кожного} \\ \text{з решти стовпців} \\ K - I \to K, \\ K = \overline{2, n} \end{array} \right| =$$

$$= b_n \cdot D_{n-1} + \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & 0 & b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \end{vmatrix} = b_n \cdot D_{n-1} + a_n \cdot b_{n-1} \cdot \ldots \cdot b_1 .$$

Ми отримали неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку $D_n = b_n \cdot D_{n-1} + a_n \cdot \prod\limits_{m=1}^{n-1} b_m$, де $D_1 = a_1 + b_1$, $p(n) = b_n$, $q(n) = a_n \prod\limits_{m=1}^{n-1} b_m$. Згідно з формулою $D_n = \prod\limits_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{q(k)}{\prod\limits_{m=2}^{k} p(m)} \right)$ маємо

$$D_n = \prod_{m=2}^{n} b_m \cdot \left(a_1 + b_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k \prod_{m=1}^{k-1} b_m}{\prod_{m=2}^{k} b_m} \right) = \prod_{m=2}^{n} b_m \cdot \left(a_1 + b_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{k-1}}{b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots b_{k-1} \cdot b_k} \right) =$$

$$= \prod_{m=2}^{n} b_m \cdot \left(a_1 + b_1 + b_1 \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{b_k} \right) = \prod_{m=1}^{n} b_m \cdot \left(\frac{a_1}{b_1} + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{b_k} \right) = \prod_{m=1}^{n} b_m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \right).$$

У випадку, коли $b_1 = 0$ визначник можна обчислити методом зведення до трикутного вигляду. Значення цього визначника дорівнює $D_n = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} b_m$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

1.03.01.

$$a_n = n, \quad b_n = n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & n & \cdots & n \\ n-1 & 2n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-2 & n-2 & 2n-3 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$. $D_2 = 13$,

$D_3 = 70$. $D_n = (n+1) \cdot D_{n-1} + n \cdot n!$, $D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{m+1} \right) \cdot (n+1)!$.

1.03.02.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 3n-4 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 3n-7 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$. $D_2 = 7$,

$D_3 = 31$. $D_n = n \cdot D_{n-1} + (2n-1) \cdot (n-1)!$, $D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{2m-1}{m}\right) \cdot n!$.

1.03.03.

$$a_n = n, \quad b_n = 3n-2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-2 & n & n & \cdots & n \\ n-1 & 4n-6 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n-2 & n-2 & 4n-10 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 10$,

$D_3 = 82$, $D_n = (3n-2) \cdot D_{n-1} + n \cdot \prod_{m=1}^{n-1} (3n-2)$, $D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{m}{3m-2}\right) \cdot \prod_{m=1}^{n} (3m-2)$.

1.03.04.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = 1-2n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & 0 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & 0 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = -3$,

$D_3 = 30$, $D_n = -(2n-1) \cdot D_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)!!$, $D_n = (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot (2n-1)!!$.

1.03.05.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = -n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-3 & n-2 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n-5 & 2n-5 & n-3 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = -3$, $D_3 = 19$, $D_n = -n \cdot D_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot (2n-1) \cdot (n-1)!$, $D_n = \left(\sum_{m=2}^{n} \frac{2m-1}{m} \right) \cdot (-1)^{n-1} \cdot n!$.
1.03.06. $$a_n = 3n-2, \quad b_n = -n,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n-2 & 3n-2 & 3n-2 & \cdots & 3n-2 \\ 3n-5 & 2n-4 & 3n-5 & \cdots & 3n-5 \\ 3n-8 & 3n-8 & 2n-6 & \cdots & 3n-8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = -4$, $D_3 = 26$, $D_n = -n \cdot D_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot (3n-2) \cdot (n-1)!$, $D_n = \left(1 + \sum_{m=2}^{n} \frac{3m-2}{m} \right) \cdot (-1)^{n-1} \cdot n!$.

§ 2. Лінійні рекурентні співвідношення другого порядку

Розглянемо однорідне лінійне рекурентне співвідношення другого порядку виду $D_n - p_n D_{n-1} + q_n D_{n-2} = 0$, $(n > 2)$. Будемо обмежуватися випадком, коли варіанти D_n, p_n і q_n приймають дійсні значення. Розв'язуючи це співвідношення відносно D_n , дістаємо:

$$D_n = p_n D_{n-1} - q_n D_{n-2}, \ (n > 2). \tag{2.1}$$

При обчисленні трьохдіагонального визначника, розклавши його за елементами 1-го рядка, з'являються лінійні рекурентні співвідношення другого порядку. Наприклад,

$$D_n = \begin{vmatrix} p_n & q_n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & p_{n-1} & q_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & p_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_1 \end{vmatrix}.$$

Обчислення значення визначника зводиться до розв'язання задачі Коші

$$\begin{cases} D_n = p_n D_{n-1} - q_n D_{n-2}, \\ D_1 = p_1, \\ D_2 = \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ 1 & p_1 \end{vmatrix}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1.

Якщо задача Коші (2.2) має розв'язок, то він єдиний.

Доведення

Припустимо супротивне. Нехай варіанти U_n та $V_n -$ розв'язки задачі Коші (6.1) такі, що $U_n \neq V_n$. Тоді , мають місце рівності:

$$\begin{cases} U_n = p_n U_{n-1} - q_n U_{n-2}, \\ V_n = p_n V_{n-1} - q_n V_{n-2}. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге

$$(U_n - V_n) = p_n (U_{n-1} - V_{n-1}) - q_n (U_{n-2} - V_{n-2}).$$

Оскільки $(U_1 - V_1) = 0$ і $(U_2 - V_2) = 0$, то, використовуючи метод математичної індукції, отримаємо $(U_n - V_n) = 0$. Звідси, $U_n = V_n$, що неможливо. Теорему доведено.

Теорема 2.2.

Множина усіх розв'язків рекурентного співвідношення $D_n = p_n D_{n-1} - q_n D_{n-2}$ утворює двовимірний лінійний простір.

Доведення

Задамо множину усіх розв'язків рекурентного співвідношення $D_n = p_n D_{n-1} - q_n D_{n-2}$: $M = \left\{ Z_n \middle| Z_n - p_n \cdot Z_{n-1} + q_n \cdot Z_{n-2} = 0 \right\}$. Покажемо, що $M -$ лінійна множина.

1. Нехай $U_n \in M$ і $V_n \in M$ такі, що $Z_n = (U_n + V_n)$.

$$Z_n - p_n \cdot Z_{n-1} + q_n \cdot Z_{n-2} = (U_n - p \ \cdot U_{n-1} + q_n \cdot U_{n-2}) + (V_n - p_n \cdot V_{n-1} + q_n \cdot V_{n-2}) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad Z_n = (U_n + V_n) \in M.$$

2. Нехай $C \in \mathbb{R}$ і $U_n \in M$ такі, що .

$$Z_n - p_n \cdot Z_{n-1} + q_n \cdot Z_{n-2} = C \cdot (U_n - p_n \cdot U_{n-1} + q_n \cdot U_{n-2}) = C \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Z_n = C \cdot U_n \in M.$$

Оскільки введені операції додавання і множення на дійсне число є операціями на даній множині, то $M -$ лінійна множина.

Далі, будь-який частковий розв'язок U_n розглянутого рекурентного співвідношення, однозначно визначається вектором початкових значень $\{U_1, U_2\}$. Нехай $N = \left\{ x \middle| x = \{x_1, x_2\}, x_1, x_2 \in R \right\}$, тоді $\dim M = \dim N = 2$. Таким чином, лінійна множина M утворює лінійний простір над полем дійсних. Теорему доведено.

Варіанти U_n і V_n лінійно незалежні, коли з рівності $C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n = 0$ випливає, що $C_u = C_v = 0$.

Система рівнянь $\begin{cases} C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n = 0; \\ C_u \cdot U_{n-1} + C_v \cdot V_{n-1} = 0 \end{cases}$ має тільки тривіальний (нульовий) розв'язок, коли визначник системи відмінний від нуля.

$$W_n = \begin{vmatrix} U_n & V_n \\ U_{n-1} & V_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$W_n = \begin{vmatrix} U_n & V_n \\ U_{n-1} & V_{n-1} \end{vmatrix}$ – *Вронськіан* (визначник Вронського) для варіант U_n і V_n. Таким чином, для лінійно незалежних варіант U_n і V_n визначник Вронського відмінний від нуля.

Нехай U_n і V_n – два лінійно незалежні часткові розв'язки рекурентного співвідношення $D_n = p_n D_{n-1} - q_n D_{n-2}$. Тоді $\begin{cases} U_n = p_n U_{n-1} - q_n U_{n-2}, \\ V_n = p_n V_{n-1} - q_n V_{n-2} \end{cases}$.

$$\begin{cases} U_n = p_n U_{n-1} - q_n U_{n-2}; & \left| \cdot V_{n-1} \right. \\ V_n = p_n V_{n-1} - q_n V_{n-2}, & \left| \cdot U_{n-1} \right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad - \begin{cases} U_n V_{n-1} = p_n U_{n-1} V_{n-1} - q_n U_{n-2} V_{n-1}; \\ V_n U_{n-1} = p_n V_{n-1} U_{n-1} - q_n V_{n-2} U_{n-1} \end{cases}$$

$$U_n V_{n-1} - V_n U_{n-1} = q_n \cdot \left(V_{n-2} U_{n-1} - U_{n-2} V_{n-1} \right),$$

$$\begin{vmatrix} U_n & V_n \\ U_{n-1} & V_{n-1} \end{vmatrix} = q_n \cdot \begin{vmatrix} U_{n-1} & V_{n-1} \\ U_{n-2} & V_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Позначивши $W_n = \begin{vmatrix} U_n & V_n \\ U_{n-1} & V_{n-1} \end{vmatrix}$, отримаємо рівність $W_n = q_n \cdot W_{n-1}$. Це однорідне рекурентне співвідношення першого порядку, розв'язком якого є $W_n = W_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} q_m$. Отримане значення Вронськіана дає можливість за відомим частковим розв'язком V_n побудувати другий лінійно незалежний частковий розв'язок U_n. Для цього необхідно отримати частковий розв'язок неоднорідного лінійного рекурентного співвідношення першого порядку $U_n = \frac{V_n}{V_{n-1}} \cdot U_{n-1} + \frac{W_1}{V_{n-1}} \cdot \prod_{m=2}^{n} q_m$.

Нехай U_n і V_n – два лінійно незалежні часткові розв'язки рекурентного співвідношення $D_n - p_n D_{n-1} + q_n D_{n-2} = 0$, тоді загальний розв'язок матиме вигляд $D_n = C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n$.

Розглянемо частковий випадок, коли варіанти p_n та q_n задовольняють умові $p_n = q_n + 1$. В цьому випадку $D_n = (q_n + 1)D_{n-1} - q_n D_{n-2}$. Цьому рекурентному співвідношенню задовольняє, наприклад, визначник $D_n = \begin{vmatrix} q_n + 1 & q_n & q_n & \cdots & q_n \\ 1 & q_{n-1} + 1 & q_{n-1} & \cdots & q_{n-1} \\ 1 & 1 & q_{n-2} + 1 & \cdots & q_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & q_1 + 1 \end{vmatrix}$. Очевидним частковим розв'язком є $V_n = 1$. Дійсно, $1 - (q_n + 1) + q_n \equiv 0$. Далі, $W_n = \prod_{m=1}^{n} q_m$, тоді

$$U_n = U_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} q_m,\ U_n = \sum_{s=1}^{n} \prod_{m=1}^{s} q_m.\ D_n = C_u \cdot \sum_{s=1}^{n} \prod_{m=1}^{s} q_m + C_v,$$

$$\begin{cases} D_1 = C_u \cdot q_1 + C_v; \\ D_2 = C_u \cdot q_1 \cdot (1 + q_2) + C_v, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_u = \dfrac{D_2 - D_1}{q_1 \cdot q_2}; \\ C_v = \dfrac{D_1 \cdot (1 + q_2) - D_2}{q_1 \cdot q_2} \cdot q_1, \end{cases}$$

$$D_n = \frac{D_2 - D_1}{q_1 \cdot q_2} \cdot \sum_{s=1}^{n} \prod_{m=1}^{s} q_m + \frac{D_1 \cdot (1 + q_2) - D_2}{q_1 \cdot q_2} \cdot q_1.$$

Розглянемо обчислення деяких визначників $n - го$ порядку, для яких можна побудувати рекурентне співвідношення (2.1).

Почнемо з прикладу, для розв'язування якого використовують теорему про існування і єдиність розв'язку задачі Коші (2.2).

Приклад 2.01.

Довести тотожність:

$$\begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| \; I - II \to I \; \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n + b_n - b_{n-1} & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n + b_n & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left(a_n + b_n\right) \cdot D_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot D_{n-2} .$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} D_n = \left(a_n + b_n\right) \cdot D_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot D_{n-2}; \\ D_1 = a_1 + b_1; \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_1 \\ b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Розклавши визначник Δ_n за елементами першого рядка, дістанемо рекурентне співвідношення

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left(a_n + b_n\right) \cdot \Delta_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot \Delta_{n-2} .$$

Таким чином, варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \Delta_n = \left(a_n + b_n\right) \cdot \Delta_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot \Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = a_1 + b; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_1 \\ b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}. \end{cases}.$$

Отже, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.01.01.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

2.01.02.

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & y \\ b & a+b & a & \cdots & y \\ b & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix}.$$

2.01.03.

$$\begin{vmatrix} 2a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-2} & 2a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & 2a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-2} & 2a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a_1 \end{vmatrix}.$$

2.01.04.

$$\begin{vmatrix} a_{n+1}+a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2+a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n+1}+a_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2+a_1 \end{vmatrix}.$$

2.01.05.

$$\begin{vmatrix} 2n+1 & n & n & \cdots & n \\ n+1 & 2n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n+1 & n & 2n-3 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & 2n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

2.01.06.

$$\begin{vmatrix} 3n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2n-3 & 3n-4 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2n-5 & 2n-5 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3n-1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-3 & 3n-4 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-5 & 3n-7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

2.01.07.

$$\begin{vmatrix} 3n+1 & n & n & \cdots & n \\ 2n+1 & 3n-2 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 2n+1 & 2n-1 & 3n-5 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 2n+1 & 3n-2 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-1 & 3n-5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

2.01.08.

$$\begin{vmatrix} 4n & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n+1 & 4n-4 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ 2n+1 & 2n-1 & 4n-8 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4n & 2n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n+1 & 4n-4 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-1 & 4n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.02.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n+b_n-\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot b_n & -\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot II \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n+b_n & -\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left(a_n+b_n\right)\cdot D_{n-1} - a_n \cdot b_n \cdot D_{n-2}.$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} D_n = (a_n + b_n)\cdot D_{n-1} - a_n \cdot b_n \cdot D_{n-2}; \\ D_1 = a_1 + b_1; \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_2 \\ b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}. \end{cases}.$$

Розклавши визначник Δ_n за елементами першого рядка, дістанемо рекурентне співвідношення

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = (a_n + b_n)\cdot \Delta_{n-1} - a_n \cdot b_n \cdot \Delta_{n-2} \ .$$

Таким чином, варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \Delta_n = (a_n + b_n)\cdot \Delta_{n-1} - a_n \cdot b_n \cdot \Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = a_1 + b_1; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_2 \\ b_2 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Отже, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.02.01.

$$a_n = -b_n, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ -a_n & 0 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ -a_n & -a_{n-1} & 0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_1 = \Delta_1 = 0$, $D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix} = a_2^2$, $D_n = a_n^2 \cdot D_{n-2}$.

2.02.02.

$$a_n = n, \quad b_n = n,$$

$$\begin{vmatrix} 2n & n & n & \cdots & n \\ n & 2n-2 & n-1 & \cdots & n-1 \\ n & n-1 & 2n-4 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 2n-2 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2n-4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_1 = \Delta_1 = 2$, $D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $D_n = 2n \cdot D_{n-1} - n^2 \cdot D_{n-2}$.

2.02.03.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = n,$$

$$\begin{vmatrix} 3n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ n & 3n-4 & 2n-3 & \cdots & 2n-3 \\ n & n-1 & 3n-7 & \cdots & 2n-5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3n-1 & 2n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 3n-4 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 3n-7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_1 = \Delta_1 = 2$, $D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $D_n = (3n-1) \cdot D_{n-1} - (2n-1) \cdot n \cdot D_{n-2}$.

2.02.04.

$$a_n = n^2, \quad b_n = n,$$

$$\begin{vmatrix} n^2+n & n^2 & n^2 & \cdots & n^2 \\ n & n^2-n & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ n & n-1 & n^2-3n+2 & \cdots & (n-2)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n^2+n & n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ n & n^2-n & (n-1)^2 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & n^2-3n+2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_1 = \Delta_1 = 2$, $D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $D_n = (n^2+n) \cdot D_{n-1} - n^3 \cdot D_{n-2}$.

2.02.05.

$$a_n = n^2 - 1, \quad b_n = 1,$$

$$\begin{vmatrix} n^2 & n^2-1 & n^2-1 & \cdots & n^2-1 \\ 1 & (n-1)^2 & n^2-2n & \cdots & n^2-2n \\ 1 & 1 & (n-2)^2 & \cdots & (n-2)^2-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n^2 & n^2-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (n-1)^2 & n^2-2n & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & (n-2)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_1 = \Delta_1 = 1$, $D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $D_n = n^2 \cdot D_{n-1} - \left(n^2-1\right) \cdot D_{n-2}$.

2.02.06.

$$a_n = 2^n, \quad b_n = 2^{n-1},$$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2^{n-1} & 2^n & 2^n & \cdots & 2^n \\ 2^{n-1} & 3\cdot 2^{n-2} & 2^{n-1} & \cdots & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 3\cdot 2^{n-3} & \cdots & 2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 2^{n-1} & 2^n & 0 & \cdots & 0 \\ 2^{n-1} & 3\cdot 2^{n-2} & 2^{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 2^{n-2} & 3\cdot 2^{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_1 = \Delta_1 = 3$, $D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$, $D_n = 3\cdot 2^{n-2} \cdot D_{n-1} - 2^{2n-1} \cdot D_{n-2}$.

2.02.07.

$$a_n = a^n, \quad b_n = b^n,$$

$$\begin{vmatrix} a^n+b^n & a^n & a^n & \cdots & a^n \\ b^n & a^{n-1}+b^{n-1} & a^{n-1} & \cdots & a^{n-1} \\ b^n & b^{n-1} & a^{n-2}+b^{n-2} & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^n+b^n & a^n & 0 & \cdots & 0 \\ b^n & a^{n-1}+b^{n-1} & a^{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b^{n-1} & a^{n-2}+b^{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_1 = \Delta_1 = a+b$, $D_2 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & a^2 \\ b^2 & s+b \end{vmatrix}$,

$D_n = \left(a^n + b^n\right) \cdot D_{n-1} - a^n \cdot b^n \cdot D_{n-2}$.

Приклад 2.03.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники:

$$\begin{vmatrix} 2 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 2 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 2 & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 2 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \left| I - a \cdot II \to I \right| = \begin{vmatrix} 2-ab & -a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 2 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - b \cdot II \to I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 2 & a & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & b & 2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot D_{n-1} - a \cdot b \cdot D_{n-2} \ .$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} D_n = 2 \cdot D_{n-1} - a \cdot b \cdot D_{n-2}; \\ D_1 = 2; \\ D_2 = 4 - ab. \end{cases}.$$

Розклавши визначник Δ_n за елементами першого рядка, дістанемо рекурентне співвідношення

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 2 & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_{n-1} - a \cdot b \cdot \Delta_{n-2}.$$

Таким чином, варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \Delta_n = 2 \cdot \Delta_{n-1} - a \cdot b \cdot \Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = 2; \\ \Delta_2 = 4 - ab. \end{cases}.$$

Отже, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.03.01. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 1 & 2 & -1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$
2.03.02. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3^{n-2} \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 3^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$
2.03.03. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & 4 & 3 & \cdots & 3 \\ 2^2 & 2 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 4 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}$

2.03.04. $$\begin{vmatrix} \frac{a+1}{a} & a & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b & \frac{a+1}{a} & a & \cdots & a^{2n-5} \\ b^2 & b & \frac{a+1}{a} & \cdots & a^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & \frac{a+1}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a+1}{a} & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \frac{a+1}{a} & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & \frac{a+1}{a} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a+1}{a} \end{vmatrix}$$
2.03.05. $$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2b & \cdots & a^{n-1}b \\ ab & a+b & ab & \cdots & a^{n-2}b \\ ab^2 & ab & a+b & \cdots & a^{n-3}b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ab^{n-1} & ab^{n-2} & ab^{n-3} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ ab & a+b & ab & \cdots & 0 \\ 0 & ab & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$
2.03.06. $$\begin{vmatrix} \frac{2}{a} & a & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ a & \frac{2}{a} & a & \cdots & a^{2n-5} \\ a^3 & a & \frac{2}{a} & \cdots & a^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{2n-3} & a^{2n-5} & a^{2n-7} & \cdots & \frac{2}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{a} & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & \frac{2}{a} & a & \cdots & 0 \\ 0 & a & \frac{2}{a} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{a} \end{vmatrix}$$

Приклад 2.04.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники:

$$\begin{vmatrix} a+b & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ b^2 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b^3 & b^2 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ b^2 & a+b & a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & b^2 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Побудуємо рекурентні співвідношення окремо для кожного визначника.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ b^2 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b^3 & b^2 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \left| I - a \cdot II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b-ab^2 & -ab & 0 & \cdots & 0 \\ b^2 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b^3 & b^2 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - b \cdot II \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & -ab & 0 & \cdots & 0 \\ -ab & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & b^2 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = (a+b) \cdot D_{n-1} - a^2 \cdot b^2 \cdot D_{n-2} \; .$$

Таким чином, варіанта D_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} D_n = (a+b) \cdot D_{n-1} - a^2 \cdot b^2 \cdot D_{n-2}; \\ D_1 = a+b; \\ D_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ b^2 & a+b \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Розклавши визначник Δ_n за елементами першого рядка, дістанемо рекурентне співвідношення

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ b^2 & a+b & a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & b^2 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix} = (a+b) \cdot \Delta_{n-1} - a^2 \cdot b^2 \cdot \Delta_{n-2} \; .$$

Таким чином, варіанта Δ_n є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \Delta_n = (a+b)\cdot\Delta_{n-1} - a^2\cdot b^2\cdot\Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = a+b; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ b^2 & a+b \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Отже, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.04.01. $$a=2,\ \ b=1,$$ $$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $\Delta_1 = 3 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 3\cdot D_{n-1} - 4\cdot D_{n-2}$
2.04.02. $$a=1,\ \ b=3,$$ $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 9 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ 27 & 9 & 4 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^n & 3^{n-1} & 3^{n-2} & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 9 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 9 & 4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$ # $\Delta_1 = 4 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 4\cdot D_{n-1} - 9\cdot D_{n-2}$

2.04.03.

$$a=4,\ \ b=1,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 16 & 64 & \cdots & 4^n \\ 1 & 5 & 16 & \cdots & 4^{n-1} \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 4^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 16 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 5 & 16 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 5 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 16 \cdot D_{n-2}$

2.04.04.

$$a=5,\ \ b=1,$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 25 & 125 & \cdots & 5^n \\ 1 & 6 & 25 & \cdots & 5^{n-1} \\ 1 & 1 & 6 & \cdots & 5^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 25 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 6 & 25 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 6 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 6 \cdot D_{n-1} - 25 \cdot D_{n-2}$

2.04.05.

$$a=2,\ \ b=3,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 & \cdots & 2^n \\ 9 & 5 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 27 & 9 & 5 & \cdots & 2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^n & 3^{n-1} & 3^{n-2} & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 9 & 5 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 9 & 5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 5 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 36 \cdot D_{n-2}$

2.04.06.

$$a = 2,\ \ b = 5,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 & \cdots & 2^n \\ 25 & 7 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 125 & 25 & 7 & \cdots & 2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5^n & 5^{n-1} & 5^{n-2} & \cdots & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 25 & 7 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 25 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 7 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 25 & 7 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 7 \cdot D_{n-1} - 100 \cdot D_{n-2}$

Приклад 2.05.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & a^{2n-5} \\ b^3 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & a^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-3} & b^{2n-5} & b^{2n-7} & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$ та $n = 2$.

*1. $D_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \Delta_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix} = \Delta_2$.

Загальний випадок.

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & a^{2n-5} \\ b^3 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & a^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-3} & b^{2n-5} & b^{2n-7} & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}=\left|I-a^2\cdot II\to I\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-a^2b & -\frac{a^2}{b} & 0 & \cdots & 0 \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & a^{2n-5} \\ b^3 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & a^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-3} & b^{2n-5} & b^{2n-7} & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{l}\text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-b^2\cdot II\to I\end{array}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & -\frac{a^2}{b} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{b^2}{a} & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & a^{2n-5} \\ 0 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & a^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b^{2n-5} & b^{2n-7} & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot D_{n-1}-ab\cdot D_{n-2}.$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot \Delta_{n-1}-ab\cdot \Delta_{n-2}.$$

Таким чином, варіанти D_n та Δ_n є розв'язками однієї і тієї ж задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot D_{n-1} - ab\cdot D_{n-2}; \\ D_1 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}; \\ D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_n = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot \Delta_{n-1} - ab\cdot \Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Отже, варіанти D_n і Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.05.01.

$$a=1,\ \ b=1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 2 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = \Delta_n = 2\cdot D_{n-1} - D_{n-2}$

2.05.02.

$$a=2,\ \ b=2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & \cdots & 2^{2n-3} \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2^{2n-5} \\ 8 & 2 & 1 & \cdots & 2^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{2n-3} & 2^{2n-5} & 2^{2n-7} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = D_{n-1} - 4\cdot D_{n-2}$

2.05.03.

$$a=\frac{x}{y},\ \ b=\frac{y}{x},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \frac{x}{y} & \left(\frac{x}{y}\right)^3 & \cdots & \left(\frac{x}{y}\right)^{2n-3} \\ \frac{y}{x} & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \frac{x}{y} & \cdots & \left(\frac{x}{y}\right)^{2n-5} \\ \left(\frac{y}{x}\right)^3 & \frac{y}{x} & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \cdots & \left(\frac{x}{y}\right)^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{y}{x}\right)^{2n-3} & \left(\frac{y}{x}\right)^{2n-5} & \left(\frac{y}{x}\right)^{2n-7} & \cdots & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \frac{x}{y} & \frac{x}{y} & \cdots & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \frac{x}{y} & \cdots & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & \frac{y}{x} & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \cdots & \frac{x}{y} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{y}{x} & \frac{y}{x} & \frac{y}{x} & \cdots & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \end{vmatrix}.$$

$$\#\quad \Delta_1=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=D_1,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{y}+\frac{y}{x} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{x} & \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \end{vmatrix} = D_2\,.$$

$$D_n=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\cdot D_{n-1}-D_{n-2}$$

Приклад 2.06.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^3 & a^5 & \cdots & a^{2n-1} \\ b^3 & a+b & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b^5 & b^3 & a+b & \cdots & a^{2n-6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-1} & b^{2n-3} & b^{2n-5} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^3 & 0 & \cdots & 0 \\ b^3 & a+b & a^3 & \cdots & 0 \\ 0 & b^3 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$ та $n=2$.

*1. $D_1 = a+b = \Delta_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^3 \\ b^3 & a+b \end{vmatrix} = \Delta_2$.

Загальний випадок.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a^3 & a^5 & \cdots & a^{2n-1} \\ b^3 & a+b & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b^5 & b^3 & a+b & \cdots & a^{2n-6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-1} & b^{2n-3} & b^{2n-5} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \left| I - a^2 \cdot II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b-a^2b^3 & -a^2b & 0 & \cdots & 0 \\ b^3 & a+b & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b^5 & b^3 & a+b & \cdots & a^{2n-6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-1} & b^{2n-3} & b^{2n-5} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - b^2 \cdot II \to I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & -a^2b & 0 & \cdots & 0 \\ -ab^2 & a+b & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ 0 & b^3 & a+b & \cdots & a^{2n-6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b^{2n-3} & b^{2n-5} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \left(a+b\right) \cdot D_{n-1} - a^3b^3 \cdot D_{n-2}.$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a^3 & 0 & \cdots & 0 \\ b^3 & a+b & a^3 & \cdots & 0 \\ 0 & b^3 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \left(a+b\right) \cdot \Delta_{n-1} - a^3b^3 \cdot \Delta_{n-2}.$$

Таким чином, варіанти D_n та Δ_n є розв'язками однієї і тієї ж задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^3b^3\cdot D_{n-2}; \\ D_1 = a+b; \\ D_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^3 \\ b^3 & a+b \end{vmatrix}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_n = (a+b)\cdot \Delta_{n-1} - a^3b^3\cdot \Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = a+b; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^3 \\ b^3 & a+b \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Отже, варіанти D_n і Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.06.01. $$a=2,\ b=1,$$ $$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 32 & \cdots & 2^{2n-1} \\ 1 & 3 & 8 & \cdots & 2^{2n-3} \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 2^{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 8 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $\Delta_1 = 3 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 3\cdot D_{n-1} - 8\cdot D_{n-2}$
2.06.02. $$a=1,\ b=3,$$ $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 27 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ 243 & 27 & 4 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2n-1} & 3^{2n-3} & 3^{2n-5} & \cdots & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 27 & 4 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 27 & 4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$ # $\Delta_1 = 4 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 27 & 4 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 4\cdot D_{n-1} - 27\cdot D_{n-2}$

2.06.03.

$$a=4,\ \ b=1,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 64 & 4^5 & \cdots & 4^{2n-1} \\ 1 & 5 & 64 & \cdots & 4^{2n-3} \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 4^{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 64 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 5 & 64 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 5 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 64 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 5\cdot D_{n-1} - 64\cdot D_{n-2}$

2.06.04.

$$a=5,\ \ b=1,$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 125 & 5^5 & \cdots & 5^{2n-1} \\ 1 & 6 & 125 & \cdots & 5^{2n-3} \\ 1 & 1 & 6 & \cdots & 5^{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 125 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 6 & 125 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 6 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 125 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 6\cdot D_{n-1} - 125\cdot D_{n-2}$

2.06.05.

$$a=2,\ \ b=3,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 32 & \cdots & 2^{2n-1} \\ 27 & 5 & 8 & \cdots & 2^{2n-3} \\ 243 & 27 & 5 & \cdots & 2^{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2n-1} & 3^{2n-3} & 3^{2n-5} & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 0 & \cdots & 0 \\ 27 & 5 & 8 & \cdots & 0 \\ 0 & 27 & 5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 5 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 27 & 5 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 5\cdot D_{n-1} - 216\cdot D_{n-2}$

2.06.06.

$$a=2,\ b=5,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 32 & \cdots & 2^{2n-1} \\ 125 & 7 & 8 & \cdots & 2^{2n-3} \\ 5^5 & 125 & 7 & \cdots & 2^{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5^{2n-1} & 5^{2n-3} & 5^{2n-5} & \cdots & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 & \cdots & 0 \\ 125 & 7 & 8 & \cdots & 0 \\ 0 & 125 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = 7 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 125 & 7 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 7\cdot D_{n-1} - 1000\cdot D_{n-2}$

Використовуючи навички, набуті при виконанні попередніх вправ, довести рівність визначників в наступних правах.

2.06.07.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^4 & a^7 & \cdots & a^{3n-2} \\ b^4 & a+b & a^4 & \cdots & a^{3n-5} \\ b^7 & b^4 & a+b & \cdots & a^{3n-8} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{3n-2} & b^{3n-5} & b^{3n-8} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^4 & 0 & \cdots & 0 \\ b^4 & a+b & a^4 & \cdots & 0 \\ 0 & b^4 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^4 \\ b^4 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^4b^4\cdot D_{n-2}$

2.06.08.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^5 & a^9 & \cdots & a^{4n-3} \\ b^5 & a+b & a^5 & \cdots & a^{4n-7} \\ b^9 & b^5 & a+b & \cdots & a^{4n-11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{4n-3} & b^{4n-7} & b^{4n-11} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^5 & 0 & \cdots & 0 \\ b^5 & a+b & a^5 & \cdots & 0 \\ 0 & b^5 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^5 \\ b^5 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^5b^5\cdot D_{n-2}$

2.06.09.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ b^3 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b^5 & b^3 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-1} & b^{2n-3} & b^{2n-5} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ b^3 & a+b & a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & b^3 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ b^3 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^2 b^3 \cdot D_{n-2}$

2.06.10.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ b^4 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b^7 & b^4 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{3n-2} & b^{3n-5} & b^{3n-8} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ b^4 & a+b & a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & b^4 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ b^4 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^2 b^4 \cdot D_{n-2}$

2.06.11.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ b^5 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b^9 & b^5 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{4n-3} & b^{4n-7} & b^{4n-11} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ b^5 & a+b & a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & b^5 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ b^5 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^2 b^5 \cdot D_{n-2}$

2.06.12.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^3 & a^5 & \cdots & a^{2n-1} \\ b^4 & a+b & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b^7 & b^4 & a+b & \cdots & a^{2n-5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{3n-2} & b^{3n-5} & b^{3n-8} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^3 & 0 & \cdots & 0 \\ b^4 & a+b & a^3 & \cdots & 0 \\ 0 & b^4 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^3 \\ b^4 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^3 b^4 \cdot D_{n-2}$

Приклад 2.07.

Нехай параметри a, b, p та q задовольняють умові $ab = pq$. Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} c & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ q & c & p & \cdots & p^{n-2} \\ q^2 & q & c & \cdots & p^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Визначники $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} c & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix}$ та

$\Delta_n = \begin{vmatrix} c & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ q & c & p & \cdots & p^{n-2} \\ q^2 & q & c & \cdots & p^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix}$ мають однакову структуру, $\Delta_n = D_n(p,q)$.

Крім того, $\Delta_1 = c = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c & p \\ q & c \end{vmatrix} = c^2 - pq = c^2 - ab = \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} = D_2$.

Перейдемо до рекурентних співвідношень, яким задовольняють варіанти D_n і Δ_n.

$$D_n = \begin{vmatrix} c & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix} = \left| I - a\cdot II \to I \right| = \begin{vmatrix} c-ab & a-ac & 0 & \cdots & 0 \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - b\cdot II \to I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-2ab+abc & a-ac & 0 & \cdots & 0 \\ b-bc & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix} =$$

$$= (c-2ab+abc)\cdot D_{n-1} - ab(1-c)^2 \cdot D_{n-2}.$$

$D_n == (c-2ab+abc)\cdot D_{n-1} - ab(1-c)^2 \cdot D_{n-2}$. Звідси,

$\Delta_n = (c-2pq+pqc)\cdot \Delta_{n-1} - pq(1-c)^2 \cdot \Delta_{n-2} = (c-2ab+abc)\cdot \Delta_{n-1} - ab(1-c)^2 \cdot \Delta_{n-2}$.

Таким чином, варіанти D_n та Δ_n є розв'язками однієї і тієї ж задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n = (c-2ab+abc)\cdot D_{n-1} - ab(1-c)^2 \cdot D_{n-2}; \\ D_1 = c; \\ D_2 = \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta_n = (c-2b+abc)\cdot \Delta_{n-1} - ab(1-c)^2 \cdot \Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = c; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Отже, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.07.01.

$$a = 2,\ b = 2,\quad c = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 4 & 2 & 1 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 16 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4^{n-1} & 4^{n-2} & 4^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (-3)\cdot D_{n-1}$

2.07.02.

$$a=2,\ b=2,\ \ c=3,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 4 & 2 & 3 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 16 & 4 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4^{n-1} & 4^{n-2} & 4^{n-3} & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 3 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 7\cdot D_{n-1} - 16\cdot D_{n-2}$

2.07.03.

$$a=2,\ b=3,\ \ c=5,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 5 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 9 & 3 & 5 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 6 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 36 & 6 & 5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 5 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 23\cdot D_{n-1} - 96\cdot D_{n-2}$

2.07.04.

$$a=2,\ b=3,\ \ c=7,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 7 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 9 & 3 & 7 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 6 & 7 & 1 & \cdots & 1 \\ 36 & 6 & 7 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 7 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 37\cdot D_{n-1} - 216\cdot D_{n-2}.$

2.07.05.

$$a=4,\ b=3,\quad c=5,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 16 & \cdots & 4^{n-1} \\ 3 & 5 & 4 & \cdots & 4^{n-2} \\ 9 & 3 & 5 & \cdots & 4^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 6 & 5 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 36 & 6 & 5 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = 5 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 41 \cdot D_{n-1} - 192 \cdot D_{n-2}$

2.07.06.

$$a=4,\ b=3,\quad c=7,$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 16 & \cdots & 4^{n-1} \\ 3 & 7 & 4 & \cdots & 4^{n-2} \\ 9 & 3 & 7 & \cdots & 4^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 6 & 7 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 36 & 6 & 7 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = 7 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 67 \cdot D_{n-1} - 432 \cdot D_{n-2}.$

2.07.07.

$$b=a^{-1},\ c=2,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{-1} & 2 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{-2} & a^{-1} & 2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{1-n} & a^{2-n} & a^{3-n} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = 2 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a^{-1} & 2 \end{vmatrix} = D_2.\ D_n = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}$

Приклад 2.08.

Нехай параметри a, b, p та q задовольняють умові $ab = pq$. Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} c_n & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c_{n-1} & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c_{n-2} & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ q & c_{n-1} & p & \cdots & p^{n-2} \\ q^2 & q & c_{n-2} & \cdots & p^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Визначники $D_n(a,b) = \begin{vmatrix} c_n & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c_{n-1} & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c_{n-2} & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}$ та

$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_n & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ q & c_{n-1} & p & \cdots & p^{n-2} \\ q^2 & q & c_{n-2} & \cdots & p^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}$ мають однакову структуру, $\Delta_n = D_n(p,q)$.

Крім того, $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & p \\ q & c_1 \end{vmatrix} = c_1 \cdot c_2 - pq = c_1 \cdot c_2 - ab = \begin{vmatrix} c_2 & a \\ b & c_1 \end{vmatrix} = D_2$.

Перейдемо до рекурентних співвідношень, яким задовольняють варіанти D_n і Δ_n.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c_{n-1} & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c_{n-2} & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \left| I - a\cdot II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} c_n - ab & a - ac_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b & c_{n-1} & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c_{n-2} & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - b\cdot II \to I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_n - 2ab + abc_{n-1} & a\left(1-c_{n-1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ b\left(1-c_{n-1}\right) & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left(c_n - 2ab + abc_{n-1}\right)\cdot D_{n-1} - ab\left(1-c_{n-1}\right)^2 \cdot D_{n-2}.$$

$D_n = \left(c_n - 2ab + abc_{n-1}\right)\cdot D_{n-1} - ab\left(1-c_{n-1}\right)^2 \cdot D_{n-2}$.. Тоді

$$\Delta_n = \left(c_n - 2pq + pqc_{n-1}\right)\cdot \Delta_{n-1} - pq\left(1-c_{n-1}\right)^2 \cdot \Delta_{n-2} = \left(c_n - 2ab + abc_{n-1}\right)\cdot \Delta_{n-1} - ab\left(1-c_{n-1}\right)^2 \cdot \Delta_{n-2}.$$

Таким чином, варіанти D_n та Δ_n є розв'язками однієї і тієї ж задачі Коші:

$$\begin{cases} D_n = \left(c_n - 2ab + abc_{n-1}\right)\cdot D_{n-1} - ab\left(1-c_{n-1}\right)^2 \cdot D_{n-2}; \\ D_1 = c_1; \\ D_2 = \begin{vmatrix} c_2 & a \\ b & c_1 \end{vmatrix}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta_n = \left(c_n - 2b + abc_{n-1}\right)\cdot \Delta_{n-1} - ab\left(1-c_{n-1}\right)^2 \cdot \Delta_{n-2}; \\ \Delta_1 = c_1; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & a \\ b & c_1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Отже, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.08.01.

$$a=2,\ b=2,\quad c_n=n,$$

$$\begin{vmatrix} n & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 4 & 2 & n-2 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 16 & 4 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4^{n-1} & 4^{n-2} & 4^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (5n-12)\cdot D_{n-1} - 4\cdot(n-2)^2\cdot D_{n-2}$

2.08.02.

$$a=2,\ b=2,\quad c_n=2n-1,$$

$$\begin{vmatrix} 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 2 & 2n-3 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 4 & 2 & 2n-5 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & 2n-3 & 1 & \cdots & 1 \\ 16 & 4 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4^{n-1} & 4^{n-2} & 4^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = D_2$.

$D_n = (10n-21)\cdot D_{n-1} - 16\cdot(n-2)^2\cdot D_{n-2}$

2.08.03.

$$a=2,\ b=3,\quad c_n=n,$$

$$\begin{vmatrix} n & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & n-1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 9 & 3 & n-2 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 6 & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 36 & 6 & n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = D_2$.

$D_n = (7n-15)\cdot D_{n-1} - 6\cdot(n-2)^2\cdot D_{n-2}$

2.08.04.

$$a=2,\ \ b=3,\quad c_n=2n-1,$$

$$\begin{vmatrix} 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 3 & 2n-3 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 9 & 3 & 2n-5 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 6 & 2n-3 & 1 & \cdots & 1 \\ 36 & 6 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1=1=D_1$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=D_2$.

$$D_n=(14n-31)\cdot D_{n-1}-24\cdot(n-2)^2\cdot D_{n-2}.$$

2.08.05.

$$a=4,\ \ b=3,\quad c_n=n,$$

$$\begin{vmatrix} n & 4 & 16 & \cdots & 4^{n-1} \\ 3 & n-1 & 4 & \cdots & 4^{n-2} \\ 9 & 3 & n-2 & \cdots & 4^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 6 & n-1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 36 & 6 & n-2 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1=1=D_1$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=D_2$.

$$D_n=(13n-36)\cdot D_{n-1}-12\cdot(n-2)^2\cdot D_{n-2}$$

2.08.06.

$$a=4,\ \ b=3,\quad c_n=2n-1,$$

$$\begin{vmatrix} 2n-1 & 4 & 16 & \cdots & 4^{n-1} \\ 3 & 2n-3 & 4 & \cdots & 4^{n-2} \\ 9 & 3 & 2n-5 & \cdots & 4^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 6 & 2n-3 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 36 & 6 & 2n-5 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6^{n-1} & 6^{n-2} & 6^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1=1=D_1,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=D_2.$

$D_n=(26n-61)\cdot D_{n-1}-48\cdot(n-2)^2\cdot D_{n-2}.$

Приклад 2.09.

Нехай параметри $a_n, b_n,\ p_n$ та q_n задовольняють умові $a_nb_n=p_nq_n$. Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_n & a_{n-2}b_n & \cdots & a_1b_n \\ a_nb_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1} & \cdots & a_1b_{n-1} \\ a_nb_{n-2} & a_{n-1}b_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_{n-1}b_1 & a_{n-2}b_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & p_{n-1}q_n & p_{n-2}q_n & \cdots & p_1q_n \\ p_nq_{n-1} & c_{n-1} & p_{n-2}q_{n-1} & \cdots & p_1q_{n-1} \\ p_nq_{n-2} & p_{n-1}q_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & p_1q_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_nq_1 & p_{n-1}q_1 & p_{n-2}q_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Визначники $D_n(a_n, b_n)=\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_n & a_{n-2}b_n & \cdots & a_1b_n \\ a_nb_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1} & \cdots & a_1b_{n-1} \\ a_nb_{n-2} & a_{n-1}b_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_{n-1}b_1 & a_{n-2}b_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}$ та

$\Delta_n=\begin{vmatrix} c_n & p_{n-1}q_n & p_{n-2}q_n & \cdots & p_1q_n \\ p_nq_{n-1} & c_{n-1} & p_{n-2}q_{n-1} & \cdots & p_1q_{n-1} \\ p_nq_{n-2} & p_{n-1}q_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & p_1q_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_nq_1 & p_{n-1}q_1 & p_{n-2}q_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}$ мають однакову структуру,

$\Delta_n=D_n(p_n, q_n).$

Перейдемо до рекурентних співвідношень, яким задовольняють варіанти D_n і Δ_n.

$$D_n=\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_n & a_{n-2}b_n & \cdots & a_1b_n \\ a_nb_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1} & \cdots & a_1b_{n-1} \\ a_nb_{n-2} & a_{n-1}b_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_{n-1}b_1 & a_{n-2}b_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}=\left| I-\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot II\to I \right|=$$

$$=\begin{vmatrix} c_n-a_nb_n & a_{n-1}b_n-\dfrac{b_nc_{n-1}}{b_{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_nb_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1} & \cdots & a_1b_{n-1} \\ a_nb_{n-2} & a_{n-1}b_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_{n-1}b_1 & a_{n-2}b_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}=\left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot II\to I \end{array} \right|=$$

$$=\begin{vmatrix} c_n-2a_nb_n+c_{n-1}\dfrac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}} & \dfrac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\left(a_{n-1}b_{n-1}-c_{n-1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\left(a_{n-1}b_{n-1}-c_{n-1}\right) & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1} & \cdots & a_1b_{n-1} \\ 0 & a_{n-1}b_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1}b_1 & a_{n-2}b_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(c_n-2a_nb_n+c_{n-1}\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}\right)\cdot D_{n-1}-\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}\cdot\left(a_{n-1}b_{n-1}-c_{n-1}\right)^2\cdot D_{n-2}.$$

$$D_n=\left(c_n-2a_nb_n+c_{n-1}\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}\right)\cdot D_{n-1}-\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}\cdot\left(a_{n-1}b_{n-1}-c_{n-1}\right)^2\cdot D_{n-2}.$$

Таким чином,

$$\Delta_n=\left(c_n-2p_nq_n+c_{n-1}\frac{p_nq_n}{p_{n-1}q_{n-1}}\right)\cdot \Delta_{n-1}-\frac{p_nq_n}{p_{n-1}q_{n-1}}\cdot\left(p_{n-1}q_{n-1}-c_{n-1}\right)^2\cdot \Delta_{n-2}.$$

Скористаємося методом математичної індукції.

1. Перевіримо, що твердження $D_n=\Delta_n$ справедливе для $n=1, n=2$.

$\Delta_1 = c_1 = D_1$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & p_1q_2 \\ p_2q_1 & c_1 \end{vmatrix} = c_1c_2 - p_1p_2q_1q_2 = c_1c_2 - a_1a_2b_1b_2 = \begin{vmatrix} c_2 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & c_1 \end{vmatrix} = D_2 .$$

2. Припустимо, що $D_{n-1} = \Delta_{n-1}$, $D_{n-2} = \Delta_{n-2}$.
3. Доведемо, що $D_n = \Delta_n$.

$$\Delta_n = \left(c_n - 2p_nq_n + c_{n-1}\frac{p_nq_n}{p_{n-1}q_{n-1}} \right) \cdot \Delta_{n-1} - \frac{p_nq_n}{p_{n-1}q_{n-1}} \cdot \left(p_{n-1}q_{n-1} - c_{n-1} \right)^2 \cdot \Delta_{n-2} =$$

$$= \left(c_n - 2a_nb_n + c_{n-1}\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}} \right) \cdot D_{n-1} - \frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}} \cdot \left(a_{n-1}b_{n-1} - c_{n-1} \right)^2 \cdot D_{n-2} = D_n .$$

Отже, твердження $D_n = \Delta_n$ справедливе при будь-якому натуральному n.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.09.01.

$$a_n = 1, \; b_n = n^2, \quad p_n = n, \quad q_n = n,$$

$$\begin{vmatrix} c_n & n^2 & n^2 & \cdots & n^2 \\ (n-1)^2 & c_{n-1} & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ (n-2)^2 & (n-2)^2 & c_{n-2} & \cdots & (n-2)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & n(n-1) & n(n-2) & \cdots & n \\ (n-1)n & c_{n-1} & n^2-3n+2 & \cdots & (n-1) \\ (n-2)n & n^2-3n+2 & c_{n-2} & \cdots & (n-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & 2 \\ 2 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & 4 \\ 1 & c_1 \end{vmatrix} = D_2$.

$$D_n = \left(c_n - 2n^2 + c_{n-1}\frac{n^2}{(n-1)^2} \right) \cdot D_{n-1} - \frac{n^2}{(n-1)^2} \cdot \left((n-1)^2 - c_{n-1} \right)^2 \cdot D_{n-2} .$$

2.09.02.

$$a_n = 1,\ \ b_n = 4^n,\quad p_n = 2^n,\quad q_n = 2^n,$$

$$\begin{vmatrix} c_n & 4^n & 4^n & \cdots & 4^n \\ 4^{n-1} & c_{n-1} & 4^{n-1} & \cdots & 4^{n-1} \\ 4^{n-2} & 4^{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 4^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & 2^{2n-1} & 2^{2n-2} & \cdots & 2^{n+1} \\ 2^{2n-1} & c_{n-1} & 2^{2n-3} & \cdots & 2^n \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-3} & c_{n-2} & \cdots & 2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n+1} & 2^n & 2^{n-1} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & 8 \\ 8 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & 16 \\ 4 & c_1 \end{vmatrix} = D_2$.

$$D_n = \left(c_n - 2^{2n+1} + 4c_{n-1}\right) \cdot D_{n-1} - 4 \cdot \left(4^{n-1} - c_{n-1}\right)^2 \cdot D_{n-2}.$$

2.09.03.

$$a_n = 1,\ \ b_n = 9^n,\quad p_n = 3^n,\quad q_n = 3^n,$$

$$\begin{vmatrix} c_n & 9^n & 9^n & \cdots & 9^n \\ 9^{n-1} & c_{n-1} & 9^{n-1} & \cdots & 9^{n-1} \\ 9^{n-2} & 9^{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 9^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 9 & 9 & 9 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & 3^{2n-1} & 3^{2n-2} & \cdots & 3^{n+1} \\ 3^{2n-1} & c_{n-1} & 3^{2n-3} & \cdots & 3^n \\ 3^{2n-2} & 3^{2n-3} & c_{n-2} & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n+1} & 3^n & 3^{n-1} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & 27 \\ 27 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & 54 \\ 9 & c_1 \end{vmatrix} = D_2$.

$$D_n = \left(c_n - 2 \cdot 3^{2n} + 9c_{n-1}\right) \cdot D_{n-1} - 9 \cdot \left(9^{n-1} - c_{n-1}\right)^2 \cdot D_{n-2}.$$

2.09.04.

$$a_n = 1,\ \ b_n = 6^n,\quad p_n = 2^n,\quad q_n = 3^n,$$

$$\begin{vmatrix} c_n & 6^n & 6^n & \cdots & 6^n \\ 6^{n-1} & c_{n-1} & 6^{n-1} & \cdots & 6^{n-1} \\ 6^{n-2} & 6^{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 6^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & 6 & 6 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & 2^{n-1}3^n & 2^{n-2}3^n & \cdots & 2 \cdot 3^n \\ 2^n 3^{n-1} & c_{n-1} & 2^{n-2}3^{n-1} & \cdots & 2 \cdot 3^{n-1} \\ 2^n 3^{n-2} & 2^{n-1}3^{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 2 \cdot 3^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^n 3 & 2^{n-1}3 & 2^{n-2}3 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & 18 \\ 12 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & 36 \\ 6 & c_1 \end{vmatrix} = D_2$.

$$D_n = \left(c_n - 2 \cdot 6^n + 6c_{n-1}\right) \cdot D_{n-1} - 6 \cdot \left(6^{n-1} - c_{n-1}\right)^2 \cdot D_{n-2}.$$

2.09.05.

$$b_n = \frac{1}{a_n}, \quad p_n = 1, \quad q_n = 1,$$

$$\begin{vmatrix} c_n & \frac{a_{n-1}}{a_n} & \frac{a_{n-2}}{a_n} & \cdots & \frac{a_1}{a_n} \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}} \\ \frac{a_n}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1} & \frac{a_{n-1}}{a_1} & \frac{a_{n-2}}{a_1} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c_{n-1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & c_{n-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & 1 \\ 1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & \frac{a_1}{a_2} \\ \frac{a_2}{a_1} & c_1 \end{vmatrix} = D_2$.

$D_n = \left(c_n - 2 + c_{n-1}\right) \cdot D_{n-1} - \left(1 - c_{n-1}\right)^2 \cdot D_{n-2}$.

2.09.06.

$$a_n = n, \; b_n = {}^1\!/_n, \quad c_n = 2, \quad p_n = 1, \quad q_n = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{n-1}{n} & \frac{n-2}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1} & 2 & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{n}{n-2} & \frac{n-1}{n-2} & 2 & \cdots & \frac{1}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = 2 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & {}^1\!/_2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}$. $D_n = n+1$.

2.09.07.

$$a_n = n,\ b_n = 1/n,\quad c_n = 2,\quad p_n = 1,\quad q_n = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2n-1 & \frac{n-1}{n} & \frac{n-2}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{n}{n-1} & 2n-3 & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{n}{n-2} & \frac{n-1}{n-2} & 2n-5 & \cdots & \frac{1}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2n-3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = 1 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = D_2.$

$D_n = (4n-6)\cdot D_{n-1} - (2n-4)^2 \cdot D_{n-2}.\quad D_n = 2^{n-1}(n-1).$

2.09.08.

$$a_n = x_n,\ b_n = \frac{1}{x_n},\quad c_n = z_n,\quad p_n = y_n,\quad q_n = \frac{1}{y_n},$$

$$\begin{vmatrix} z_n & \frac{x_{n-1}}{x_n} & \frac{x_{n-2}}{x_n} & \cdots & \frac{x_1}{x_n} \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & z_{n-1} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} & \cdots & \frac{x_1}{x_{n-1}} \\ \frac{x_n}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & z_{n-2} & \cdots & \frac{x_1}{x_{n-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{x_n}{x_1} & \frac{x_{n-1}}{x_1} & \frac{x_{n-2}}{x_1} & \cdots & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_n & \frac{y_{n-1}}{y_n} & \frac{y_{n-2}}{y_n} & \cdots & \frac{y_1}{y_n} \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & z_{n-1} & \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} & \cdots & \frac{y_1}{y_{n-1}} \\ \frac{y_n}{y_{n-2}} & \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & z_{n-2} & \cdots & \frac{y_1}{y_{n-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{y_n}{y_1} & \frac{y_{n-1}}{y_1} & \frac{y_{n-2}}{y_1} & \cdots & z_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = z_1 = D_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} z_2 & \frac{y_1}{y_2} \\ \frac{y_2}{y_1} & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 & \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_1} & z_1 \end{vmatrix} = D_2.$

$D_n = (c_n - 2 + c_{n-1})\cdot D_{n-1} - (1 - c_{n-1})^2 \cdot D_{n-2}.$

Приклад 2.10.

Довести тотожність, якщо $a_n \neq 0$ та $b_n \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} c_n & \frac{a_{n-1}}{a_n}x & \frac{a_{n-2}}{a_n}x & \cdots & \frac{a_1}{a_n}x \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & \frac{b_{n-1}}{b_n}x & \frac{b_{n-2}}{b_n}x & \cdots & \frac{b_1}{b_n}x \\ \frac{b_n}{b_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}x & \cdots & \frac{b_1}{b_{n-1}}x \\ \frac{b_n}{b_{n-2}}y & \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{b_1}{b_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{b_n}{b_1}y & \frac{b_{n-1}}{b_1}y & \frac{b_{n-2}}{b_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Визначники $D_n\left(c_{n,}\ a_n\right) = \begin{vmatrix} c_n & \frac{a_{n-1}}{a_n}x & \frac{a_{n-2}}{a_n}x & \cdots & \frac{a_1}{a_n}x \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}$ та

$\Delta_n\left(c_{n,}\ b_n\right) = \begin{vmatrix} c_n & \frac{b_{n-1}}{b_n}x & \frac{b_{n-2}}{b_n}x & \cdots & \frac{b_1}{b_n}x \\ \frac{b_n}{b_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}x & \cdots & \frac{b_1}{b_{n-1}}x \\ \frac{b_n}{b_{n-2}}y & \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{b_1}{b_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{b_n}{b_1}y & \frac{b_{n-1}}{b_1}y & \frac{b_{n-2}}{b_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}$ мають однакову структуру залежності від параметрів. Більш того, $\Delta_n\left(c_n, b_n\right) = D_n\left(c_n, b_n\right)$. Перейдемо до рекурентних співвідношень, яким задовольняють варіанти D_n і Δ_n.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & \frac{a_{n-1}}{a_n}x & \frac{a_{n-2}}{a_n}x & \cdots & \frac{a_1}{a_n}x \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \left| I - \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} c_n - y & \frac{a_{n-1}}{a_n}x - \frac{a_{n-1}c_{n-1}}{a_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot II \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} c_n + c_{n-1} - x - y & \frac{a_{n-1}}{a_n}\left(x - c_{n-1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\left(y - c_{n-1}\right) & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ 0 & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(c_n + c_{n-1} - x - y\right) \cdot D_{n-1} - \left(x - c_{n-1}\right) \cdot \left(y - c_{n-1}\right) \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(c_n + c_{n-1} - x - y\right) \cdot D_{n-1} - \left(x - c_{n-1}\right) \cdot \left(y - c_{n-1}\right) \cdot D_{n-2}.$$

Ми отримали однорідне лінійне рекурентне співвідношення другого порядку. Варіанти a_n b_n не присутні в цьому співвідношенні, тому $\Delta_n = \left(c_n + c_{n-1} - x - y\right) \cdot \Delta_{n-1} - \left(x - c_{n-1}\right) \cdot \left(y - c_{n-1}\right) \cdot \Delta_{n-2}$. Рекурентні спів відношення співпадають. Співпадають і початкові умови: $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & \frac{b_1}{b_2}x \\ \frac{b_1}{b_2}y & c_1 \end{vmatrix} = c_1c_2 - xy = \begin{vmatrix} c_2 & \frac{a_1}{a_2}x \\ \frac{a_2}{a_1}y & c_1 \end{vmatrix} = D_2$. Таким чином, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

Вправи

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

2.10.01. $$\begin{vmatrix} c_n & \frac{a_{n-1}}{a_n}x & \frac{a_{n-2}}{a_n}x & \cdots & \frac{a_1}{a_n}x \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & x & x & \cdots & x \\ y & c_{n-1} & x & \cdots & x \\ y & y & c_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$ # $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & x \\ y & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & \frac{a_1}{a_2}x \\ \frac{a_2}{a_1}y & c_1 \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (c_n + c_{n-1} - x - y) \cdot D_{n-1} - (x - c_{n-1}) \cdot (y - c_{n-1}) \cdot D_{n-2}$.
2.10.02. $$a_n = 1,\ b_n = n^2,\quad p_n = n,\quad q_n = n,$$ $$\begin{vmatrix} x+y & \frac{a_{n-1}}{a_n}x & \frac{a_{n-2}}{a_n}x & \cdots & \frac{a_1}{a_n}x \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & x+y & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & x+y & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & x & x & \cdots & x \\ y & x+y & x & \cdots & x \\ y & y & x+y & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x+y \end{vmatrix}.$$

$\Delta_1 = x + y = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x+y & x \\ y & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y & \frac{a_1}{a_2}x \\ \frac{a_2}{a_1}y & x+y \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (x+y)\cdot D_{n-1} - xy\cdot D_{n-2}$.

Приклад 2.11.

Задані визначники:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ c_{n-2} & c_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ q_{n-1} & a_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ q_{n-2} & q_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Нехай $\vec{U} = (\ u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})-$ довільний керуючий вектор, елементи якого приймають значення нуль або одиниця. Крім того, для будь-якого $s = 1, 2, \cdots, n-1$, мають місце рівності $\begin{cases} p_s = b_s\,, q_s = c_s\,, \text{якщо}\, u_s = 0; \\ p_s = c_s\,, q_s = b_s\,, \text{якщо}\, u_s = 1. \end{cases}$ Довести, що $D_n = \Delta_n$.

Розв'язання

Обидва визначники мають однакову структуру. Відмітимо два тривіальних випадки. В першому випадку, коли керуючий вектор $\vec{U}$ нульовий дорівнює нулю, елементи визначників D_n та Δ_n співпадають, і їх рівність очевидна. В другому випадку,коли всі елементи керуючого вектора $\vec{U}$ дорівнюють одиниці, таблиці елементів визначників D_n і Δ_n взаємно транспоновані. Звідси випливає, що $D_n = \Delta_n$. Для доведення тотожності у загальному випадку використаємо метод математичної індукції.

1. Перевіримо, що твердження $D_n = \Delta_n$ справедливе для $n = 1, n = 2$:

$$\Delta_1 = \left|\ a_{\cdot}\ \right| = D_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & p_1 \\ q_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_2\cdot a_1 - p_1\cdot q_1 = a_2\cdot a_1 - b_1\cdot c_1 = D_1.$$

2. Припустимо, що $D_{n-2} = \Delta_{n-2}$ і $D_{n-1} = \Delta_{n-1}$.

3. Покажемо, що $D_{n-1}=\Delta_{n-1}$ і $D_n=\Delta_n$. Перша рівність очевидна. Доведемо другу рівність. При доведенні використаємо очевидні тотожності: $p_{n-1}+q_{n-1}=b_{n-1}+c_{n-1}$ і $\left(p_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot\left(q_{n-1}-a_{n-1}\right)=\left(b_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot\left(c_{n-1}-a_{n-1}\right)$.

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ q_{n-1} & a_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ q_{n-2} & q_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=\left|I-II\to I\right|=\begin{vmatrix} a_n-q_{n-1} & p_{n-1}-a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{n-1} & a_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ q_{n-2} & q_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-II\to I \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_n+a_{n-1}-p_{n-1}-q_{n-1} & p_{n-1}-a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ 0 & q_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & q_1 & q_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_n+a_{n-1}-p_{n-1}-q_{n-1}\right)\cdot\Delta_{n-1}-\left(p_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot\left(q_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot\Delta_{n-2}=$$

$$=\left(a_n+a_{n-1}-b_{n-1}-c_{n-1}\right)\cdot D_{n-1}-\left(b_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot\left(c_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_n+a_{n-1}-b_{n-1}-c_{n-1} & b_{n-1}-a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ 0 & c_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_1 & c_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=\left|I+II\to I\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_n-b_{n-1} & b_{n-1} & b_{b-2} & \cdots & b_1 \\ c_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ 0 & c_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_1 & c_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I+II\to I \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ c_{n-2} & c_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=D_n.$$

Отже, твердження $D_n=\Delta_n$ справедливе при будь-якому натуральному n.

§ 3. Рекурентні співвідношення другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо однорідне лінійне рекурентне співвідношення другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$D_n = p \cdot D_{n-1} - q \cdot D_{n-2}, \ \left(n > 2\right) \tag{3.1}$$

і відповідне йому характеристичне рівняння $k^2 - pk + q = 0$ з коренями α і β. Тоді $D_n = \left(\alpha + \beta\right) \cdot D_{n-1} - \alpha\beta \cdot D_{n-2}$. Перепишемо цю рівність:

$$D_n - \alpha \cdot D_{n-1} = \beta \cdot \left(D_{n-1} - \alpha \cdot D_{n-2}\right) .$$

Заміною $U_n = D_n - a \cdot D_{n-1}$ останнє рекурентне співвідношення другого порядку зводиться до рекурентного співвідношення першого порядку $U_n = \beta \cdot U_{n-1}$.

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} U_n = \beta \cdot U_{n-1}; \\ U_2 = D_2 - \alpha \cdot D_1. \end{cases}$$

$$U_3 = \beta \cdot U_2 = \beta \cdot \left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right),$$

$$U_4 = \beta U_3 = \beta^2 U_2 = \beta^2 \left(D_2 - \alpha D_1\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$U_n = b^{n-2} \cdot \left(D_2 - a \cdot D_1\right).$$

Повернувшись до старих змінних $\left(D_{n-1} \text{ і } D_n\right)$, дістаємо

$$D_n - \alpha \cdot D_{n-1} = \beta^{n-2} \cdot \left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right).$$

Розглянемо два випадки.

1-й випадок. Корені характеристичного рівняння співпадають $\alpha = \beta$. Тоді

$$D_n = \alpha \cdot D_{n-1} + \alpha^{n-2} \cdot \left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right).$$

Припустивши, що $D_n = a^{n-2} \cdot Z_n$, отримаємо

$$\begin{cases} D_n = a^{n-2} \cdot Z_n; \\ D_2 = Z_2. \end{cases}$$

Після підстановки дістанемо співвідношення

$$\alpha^{n-2} Z_n = \alpha \cdot \alpha^{n-3} Z_{n-1} + \alpha^{n-2} \left(D_2 - \alpha D_1\right)$$

або еквівалентне йому співвідношення $Z_n = Z_{n-1} + \left(D_2 - \alpha D_1\right)$, яке можна розглядати як рекурентне співвідношення відносно варіанти Z_n .

Розв’яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} Z_n = Z_{n-1} + \left(D_2 - \alpha D_1\right); \\ Z_2 = D_2. \end{cases}$$

$Z_3 = Z_2 + \left(D_2 - \alpha D_1\right) = D_2 + \left(D_2 - \alpha D_1\right),$

$Z_4 = Z_3 + \left(D_2 - \alpha D_1\right) = D_2 + \left(D_2 - \alpha D_1\right) + \left(D_2 - \alpha D_1\right) = D_2 + 2\left(D_2 - \alpha D_1\right),$

……………………………………,

$Z_n = D_2 + \left(n-2\right)\left(D_2 - \alpha D_1\right).$

Отже,

$$D_n = \alpha^{n-2} \cdot \left(D_2 + \left(n-2\right)\left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right)\right),$$

$$D_n = \alpha^{n-2} \cdot \left(\left(n-1\right) \cdot D_2 - \left(n-2\right) \cdot \alpha \cdot D_1\right).$$

Розглянемо інший метод розв’язування цієї задачі. Варіанти $U_n = \alpha^n$ і $V_n = n\alpha^n$ – лінійно незалежні розв’язки рекурентного співвідношення $D_n = 2\alpha \cdot D_{n-1} - \alpha^2 \cdot D_{n-2}$:

$$U_n: \quad \alpha^n = 2\alpha \cdot \alpha^{n-1} - \alpha^2 \cdot \alpha^{n-2},$$

$$V_n: \quad n\alpha^n = 2\alpha \cdot \left(n-1\right) \cdot \alpha^{n-1} - \alpha^2 \cdot \left(n-2\right) \cdot \alpha^{n-2}.$$

Розв’язок задачі Коші треба шукати у вигляді лінійної комбінації частинних розв’язків: $D_n = C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n$. Коефіцієнти C_u і C_u визначаються початковими умовами.

$$\begin{cases} D_1 = C_u \cdot \alpha + C_v \cdot \alpha; \\ D_2 = C_u \cdot \alpha^2 + C_v \cdot 2\alpha^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_u = \dfrac{2\alpha D_1 - D_2}{\alpha^2}; \\ C_v = \dfrac{D_2 - \alpha D_1}{\alpha^2}. \end{cases}$$

$$D_n = \alpha^{n-2} \cdot \left(2\alpha D_1 - D_2 + n \cdot \left(D_2 - \alpha D_1\right)\right) = \alpha^{n-2} \cdot \left(\left(n-1\right) \cdot D_2 - \left(n-2\right) \cdot \alpha D_1\right),$$

$$D_n = \alpha^{n-2} \cdot \left(\left(n-1\right) \cdot D_2 - \left(n-2\right) \cdot \alpha D_1\right).$$

2***-й випадок.*** Характеристичне рівняння має два різні корені $\alpha \neq \beta$. Помінявши змінні α та β місцями в рівнянні $D_n - \alpha \cdot D_{n-1} = \beta^{n-2} \cdot \left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right)$, дістаємо друге рівняння : $D_n - \beta \cdot D_{n-1} = \alpha^{n-2} \cdot \left(D_2 - \beta \cdot D_1\right)$.

Система рівнянь $\begin{cases} D_n - \alpha \cdot D_{n-1} = \beta^{n-2} \cdot \left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right), \\ D_n - \beta \cdot D_{n-1} = \alpha^{n-2} \cdot \left(D_2 - \beta \cdot D_1\right) \end{cases}$ однозначно розв’язується відносно варіанти D_n.

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1} \cdot \left(D_2 - \beta \cdot D_1\right) - \beta^{n-1} \cdot \left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right)}{\alpha - \beta}.$$

Як і в першому випадку, розглянемо інший метод розв'язування цієї задачі. Варіанти $U_n = \alpha^n$ і $V_n = \beta^n$ – лінійно незалежні розв'язки рекурентного співвідношення $D_n = \left(\alpha + \beta\right) \cdot D_{n-1} - \alpha\beta \cdot D_{n-2}$:

$$U_n: \quad \alpha^n = \left(\alpha + \beta\right) \cdot \alpha^{n-1} - \alpha\beta \cdot \alpha^{n-2},$$

$$V_n: \quad \beta^n = \left(\alpha + \beta\right) \cdot \beta^{n-1} - \alpha\beta \cdot \beta^{n-2}.$$

Розв'язок задачі Коші треба шукати у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків: $D_n = C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n$. Коефіцієнти C_u і C_u визначаються початковими умовами.

$$\begin{cases} D_1 = C_u \cdot \alpha + C_v \cdot \beta; \\ D_2 = C_u \cdot \alpha^2 + C_v \cdot \beta^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_u = \dfrac{\beta^2 D_1 - \beta D_2}{\alpha\beta \cdot \left(\beta - \alpha\right)}; \\ C_v = \dfrac{\alpha D_2 - \alpha^2 D_1}{\alpha\beta \cdot \left(\beta - \alpha\right)}. \end{cases}$$

$$D_n = \frac{\beta^2 D_1 - \beta D_2}{a\beta \cdot \left(\beta - \alpha\right)} \alpha^n + \frac{\alpha D_2 - \alpha^2 D_1}{\alpha\beta \cdot \left(\beta - \alpha\right)} \beta^n,$$

$$D_n = \frac{\beta D_1 - D_2}{\beta - \alpha} \alpha^{n-1} + \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta - \alpha} \beta^{n-1},$$

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1} \cdot \left(D_2 - \beta \cdot D_1\right) - \beta^{n-1} \cdot \left(D_2 - \alpha \cdot D_1\right)}{\alpha - \beta}.$$

Зокрема, якщо $\alpha = -\beta$, рекурентне співвідношення приймає вигляд $D_n = \alpha^2 \cdot D_{n-2}$. Отримана рекурентна формула рівносильна сукупності двох співвідношень:

$$\left[\begin{array}{l} D_{2k+1} = \alpha^2 \cdot D_{2k-1}, \\ D_{2k+2} = \alpha^2 \cdot D_{2k}, \end{array}\right. \left(k > 0\right).$$

Як бачимо, значення варіанти D_n при непарному n залежать тільки від значення D_1 , а при парному n – від значення D_2 .

$$\left[\begin{array}{l} D_{2k+1} = \alpha^{2k} \cdot D_1, \\ D_{2k+2} = \alpha^{2k} \cdot D_2, \end{array}\right. \left(k > 0\right).$$

Окремі випадки

1. $\begin{cases} D_n = D_{n-2}, \\ D_1 = 0, \\ D_2 = 1. \end{cases}$, # $\left[\begin{array}{l} D_{2n-1} = 0, \\ D_{2n} = 1. \end{array}\right.$.

2. $\begin{cases} D_n = -D_{n-2}, \\ D_1 = 1, \\ D_2 = -1. \end{cases}$, # $\left[\begin{array}{l} D_{2n-1} = (-1)^{n-1}, \\ D_{2n} = (-1)^n. \end{array}\right.$.

3. $\begin{cases} D_n = 2D_{n-2}, \\ D_1 = 1, \\ D_2 = 2. \end{cases}$, # $\left[\begin{array}{l} D_{2n-1} = 2^{n-1}, \\ D_{2n} = 2^n. \end{array}\right.$.

Розглянемо тепер випадок, коли характеристичне рівняння має комплексні корені $\alpha = x + iy$, $\beta = x - iy$. Запишемо тригонометричну форму комплексних коренів $\alpha = r \cdot (\cos f + i \sin f)$, $\beta = r \cdot (\cos f - i \sin f)$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\alpha\beta = r^2$. Рекурентне співвідношення $D_n = (\alpha + \beta) \cdot D_{n-1} - \alpha\beta \cdot D_{n-2}$ приймає вигляд $D_n = 2r \cdot \cos(f) \cdot D_{n-1} - r^2 \cdot D_{n-2}$. Варіанти $U_n = r^n \cos(nf)$ та $V_n = r^n \sin(nf)$ є лінійно незалежними розв'язками цього рекурентного співвідношення:

$$U_n: \quad r^n \cos(nf) = 2r \cdot \cos(nf) \cdot r^{n-1} \cos((n-1)f) - r^2 \cdot r^{n-2} \cos((n-2)f),$$

$$\cos(nf) = 2 \cdot \cos(nf) \cdot \cos((n-1)f) - \cos((n-2)f),$$

$$\cos(nf) = \cos(nf) + \cos((n-2)f) - \cos((n-2)f).$$

$$V_n: \quad r^n \sin(nf) = 2r \cdot \cos(nf) \cdot r^{n-1} \sin((n-1)f) - r^2 \cdot r^{n-2} \sin((n-2)f),$$

$$\sin(nf) = 2 \cdot \cos(nf) \cdot \sin((n-1)f) - \sin((n-2)f),$$

$$\sin(nf) = \sin(nf) + \sin((n-2)f) - \sin((n-2)f).$$

Розв'язок задачі Коші будемо шукати у вигляді лінійної комбінації цих часткових розв'язків: $D_n = C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n$. Таким чином, $D_n = (C_u \cdot \cos(nf) + C_v \cdot \sin(nf)) \cdot r^n$. Коефіцієнти C_u і C_u визначаються початковими умовами.

$$\begin{cases} D_1 = \left(C_u \cdot \cos(f) + C_v \cdot \sin(f)\right) \cdot r; \\ D_2 = \left(C_u \cdot \cos(2f) + C_v \cdot \sin(2f)\right) \cdot r^2, \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_u = \dfrac{rD_1 2\sin f \cdot \cos f - D_2 \sin f}{r^2 \sin f} = \dfrac{2x \cdot D_1 - D_2}{x^2 + y^2}; \\ C_v = \dfrac{D_2 \cos f - rD_1 \cos(2f)}{r^2 \sin f} = \dfrac{xD_2 - \left(x^2 - y^2\right) \cdot D_1}{\left(x^2 + y^2\right) y}. \end{cases}$$

Отже,

$$D_n = \left(\frac{rD_1 2\sin f \cdot \cos f - D_2 \sin f}{r^2 \sin f} \cos(nf) + \frac{D_2 \cos f - rD_1 \cos(2f)}{r^2 \sin f} \sin(nf)\right) r^n.$$

Окремі випадки

1. $\begin{cases} D_n = D_{n-1} - D_{n-2}, \\ D_1 = 1, \\ D_2 = 1. \end{cases}$ # $k_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \pm i \cdot \sin\dfrac{\pi}{3}$, $D_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. $\begin{cases} D_n = 2D_{n-1} - 2D_{n-2}, \\ D_1 = 1, \\ D_2 = 1. \end{cases}$ # $k_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} \pm i \cdot \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $D_n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

3. $\begin{cases} D_n = 3D_{n-1} - 3D_{n-2}, \\ D_1 = 1, \\ D_2 = 2. \end{cases}$ # $k_{1,2} = \dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} \pm i \cdot \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $D_n = 3^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\cos\left(n\dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(n\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

Приклад 3.1.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} z & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & z & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & z & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} z & x & 0 \\ y & z & x \\ 0 & y & z \end{vmatrix}, \begin{matrix} (x \neq y), \\ (z \neq x + y). \end{matrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} z & x \\ y & z \end{vmatrix} = z^2 - xy = \begin{vmatrix} p^2 - zp + xy = 0, \\ z = \alpha + \beta, xy = \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \dfrac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} z & x & 0 \\ y & z & x \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p^2 - zp + xy = 0, \\ z = \alpha + \beta, xy = \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \dfrac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}$.

Загальний випадок.

*n. Розклавши визначник за елементами першого рядка, дістанемо рекурентне співвідношення

$$D_n = \begin{vmatrix} z & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & z & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & z & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix} = z \cdot D_{n-1} - xy \cdot D_{n-2}.$$

Ми отримали рекурентне співвідношення другого порядку $D_n = z \cdot D_{n-1} - xy \cdot D_{n-2}$. Припустивши, що $xy = \alpha\beta$ і $z = \alpha + \beta$, отримаємо $D_n = z \cdot D_{n-1} - xy \cdot D_{n-2} = (\alpha + \beta) \cdot D_{n-1} - \alpha\beta \cdot D_{n-2}$. $k^2 - zk + xy = 0 -$ відповідне характеристичне рівняння з коренями α і β .В цьому випадку

$$D_n = \begin{vmatrix} z & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & z & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & z & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix} = z \cdot D_{n-1} - xy \cdot D_{n-2} = (\alpha+\beta) \cdot D_{n-1} - \alpha\beta \cdot D_{n-2} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

$D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, де $\alpha + \beta = z, \alpha\beta = xy$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

3.01.01. $$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 7 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, $D_1 = 7$, $\begin{cases} p^2 - 7p + 6 = 0, \\ a = 6, b = 1. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{6^{n+1} - 1}{5}$.
3.01.02. $$D_n = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 8 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 8 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$, $D_1 = 8$, $\begin{cases} p^2 - 8p + 12 = 0, \\ a = 6, b = 2. \end{cases}$, $D_n = \dfrac{6^{n+1} - 2^{n+1}}{4}$.

3.01.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $\begin{cases} p^2 - 3p + 2 = 0, \\ a = 2, b = 1. \end{cases}$, $D_n = 2^{n+1} - 1$.

3.01.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 6 & 11 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & 11 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 11 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 6 & 11 & 4 \\ 0 & 6 & 11 \end{vmatrix}$, $D_1 = 11$, $\begin{cases} p^2 - 11p + 24 = 0, \\ a = 8, b = 3. \end{cases}$,

$D_n = \dfrac{8^{n+1} - 3^{n+1}}{5}$.

3.01.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & -7 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -7 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}$, $D_1 = -7$, $\begin{cases} p^2 + 7p + 6 = 0, \\ a = -6, b = -1. \end{cases}$,

$D_n = (-1)^n \cdot \dfrac{6^{n+1} - 1}{5}$.

3.01.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & -8 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & -8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -8 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix}$, $D_1 = -8$, $\begin{cases} p^2 + 8p + 12 = 0, \\ a = -6, b = -2. \end{cases}$, $D_n = (-1)^n \cdot \dfrac{6^{n+1} - 2^{n+1}}{4}$.

Приклад 3.2.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & a & \cdots & y \\ a & 2a & a & \cdots & y \\ a & a & 2a & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2a & a & y \\ a & 2a & y \\ x & x & z \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & y \\ x & z \end{vmatrix} = 2az - xy$. $D_2 = 2az - xy$.

*3.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2a & a & y \\ a & 2a & y \\ x & x & z \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a & -a & 0 \\ a & 2a & y \\ x & x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2a & -a & 0 \\ -a & 2a & y \\ 0 & x & z \end{vmatrix} = 2a \cdot D_2 - a^2 \cdot D_1. \quad D_3 = 2a \cdot (2az - xy) - a^2 \cdot z = 3a^2 \cdot z - 2axy.$$

Загальний випадок.

$$*n.\quad D_n=\begin{vmatrix} 2a & a & a & \cdots & y \\ a & 2a & a & \cdots & y \\ a & a & 2a & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}=\left| I-II\to I \right|=\begin{vmatrix} a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 2a & a & \cdots & y \\ a & a & 2a & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-II\to I\end{matrix}\right|=\begin{vmatrix} 2a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 2a & a & \cdots & y \\ 0 & a & 2a & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}=2a\cdot D_{n-1}-a^2\cdot D_{n-2}\quad .$$

$D_n=2a\cdot D_{n-1}-a^2\cdot D_{n-2}$. Характеристичне рівняння $k^2-2ak+a^2=0$ має рівні корені: $k_1=k_2=a$. Тому, $D_n=a^{n-2}\cdot\left(D_2+\left(D_2-a\cdot D_1\right)\cdot\left(n-2\right)\right)$. Враховуючи початкові умови, отримаємо: $D_n=a^{n-2}\cdot\left(xy+n\left(az-xy\right)\right)$. У випадку, коли $z=2a$ та $xy=a^2$, $D_n=a^n\cdot\left(n+1\right)$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

<table>
<tr><td>

3.02.01.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1=5$, $D_2=1$, $D_3=-3$, $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. $\mu_1=\mu_2=1$.

$D_n=9-4n$.

</td></tr>
<tr><td>

3.02.02.

$$D_n=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & \cdots & 3 \\ 2 & 4 & 2 & \cdots & 3 \\ 2 & 2 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

</td></tr>
</table>

$D_3=\begin{vmatrix}4&2&3\\2&4&3\\3&3&5\end{vmatrix}$, $D_1=5$, $D_2=11$ $D_2=1$, $D_3=24$, $D_n=4D_{n-1}-4D_{n-2}$. $\mu_1=\mu_2=2$. $D_n=2^{n-2}\cdot(n+9)$.
3.02.03. $$D_n=\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&2\\1&2&1&\cdots&2\\1&1&2&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=2$, $D_3=1$, $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. $\mu_1=\mu_2=1$. $D_n=4-n$.
3.02.04. $$D_n=\begin{vmatrix}4&2&2&\cdots&2\\2&4&2&\cdots&2\\2&2&4&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&1\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&1\end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=0$ $D_2=1$, $D_3=-4$, $D_n=4D_{n-1}-4D_{n-2}$. $\mu_1=\mu_2=2$. $D_n=2^{n-2}\cdot(4-2n)$.
3.02.05. $$D_n=\begin{vmatrix}3&6&6&\cdots&1\\6&3&6&\cdots&1\\6&6&3&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}3&6&1\\6&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}$, $D_1=1$, $D_2=2$, $D_3=-21$, $D_n=-6D_{n-1}-9D_{n-2}$. $\mu_1=\mu_2=-3$. $D_n=(-3)^{n-2}\cdot(5n-8)$.

3.02.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 & \cdots & 3 \\ 8 & 4 & 8 & \cdots & 3 \\ 8 & 8 & 4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = -1\, D_2 = 1$, $D_3 = -24$, $D_n = -8D_{n-1} - 16D_{n-2}$.

$\mu_1 = \mu_2 = -4$. $D_n = (-4)^{n-2} \cdot (7n - 15)$.

Приклад 3.03.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & a & a & \cdots & y \\ b & \frac{a+b}{2} & a & \cdots & y \\ b & b & \frac{a+b}{2} & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & a & y \\ b & \frac{a+b}{2} & y \\ x & x & z \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & y \\ x & z \end{vmatrix} = \frac{a+b}{2} z - xy$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & a & y \\ b & \frac{a+b}{2} & y \\ x & x & z \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} \frac{a-b}{2} & \frac{a-b}{2} & 0 \\ b & \frac{a+b}{2} & y \\ x & x & z \end{vmatrix} =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a-b}{2} & 0 \\ -\frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} & y \\ 0 & x & z \end{vmatrix} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 z = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 D_1 .$$

Загальний випадок.

*n. $D_n = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & a & a & \cdots & y \\ b & \frac{a+b}{2} & a & \cdots & y \\ b & b & \frac{a+b}{2} & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| =$

$$= \begin{vmatrix} \frac{a-b}{2} & \frac{a-b}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ b & \frac{a+b}{2} & a & \cdots & y \\ b & b & \frac{a+b}{2} & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| =$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \frac{a-b}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{b-a}{2} & \frac{a+b}{2} & a & \cdots & y \\ 0 & b & \frac{a+b}{2} & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x & x & \cdots & z \end{vmatrix} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 D_{n-2}.$$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$D_n = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 D_{n-2}$</td></tr>
<tr><td align="center">$n = 2k$</td><td align="center">$n = 2k+1$</td></tr>
<tr><td>$D_4 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot D_2,$
$D_6 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 D_4 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^4 D_2,$
.........................,
$D_{2k} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k-2} \cdot D_2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k-2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} z - xy\right).$</td><td>$D_3 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 D_1,$
$D_5 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 D_3 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^4 D_1,$
.........................,
$D_{2k+1} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k} D_1 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k} z.$</td></tr>
</table>

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

3.03.01.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$, $D_n = D_{n-2}$.

$D_{2n-1} = 2$, $D_{2n} = 1$.

3.03.02.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 1$, $D_3 = 3$, $D_n = D_{n-2}$.

$D_{2n-1} = 3$, $D_{2n} = 1$.

3.03.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 5 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 4$, $D_3 = 12$, $D_n = 4D_{n-2}$.

$D_{2n-1} = 4^{n-1} \cdot 3$, $D_{2n} = 4^n$.

3.03.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 8 & 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 8 & 8 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 8 & 8 & 8 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 2 \\ 8 & 8 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $D_2 = 9$, $D_3 = 45$, $D_n = 9D_{n-2}$.

$D_{2n-1} = 9^{n-1} \cdot 5$, $D_{2n} = 9^n$.

3.03.05. $$D_n=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & \cdots & 1 \\ 5 & 4 & 3 & \cdots & 1 \\ 5 & 5 & 4 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=5$, $D_3=2$, $D_n=D_{n-2}$. $D_{2n-1}=2$, $D_{2n}=5$.
3.03.06. $$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 5 & 5 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=1$, $D_3=8$, $D_n=4D_{n-2}$. $D_{2n-1}=4^{n-1}\cdot 2$, $D_{2n}=4^{n-1}$.

Приклад 3.04.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a & 2a & \dots & 2a & y \\ b & a+b & 2a & 2a & \dots & 2a & y \\ 0 & b & a+b & 2a & \dots & 2a & y \\ 0 & 0 & b & a+b & \dots & 2a & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & z \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a+b & 2a & y \\ b & a+b & y \\ 0 & x & z \end{vmatrix},\quad (b\neq 0).$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1 = z$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & y \\ x & z \end{vmatrix} = (a+b)z - xy$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a+b & 2a & y \\ b & a+b & y \\ 0 & x & z \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a & a-b & 0 \\ b & a+b & y \\ 0 & x & z \end{vmatrix} = a \cdot D_2 - b(a-b) \cdot D_1.$

$D_3 = a \cdot ((a+b)z - xy) - b(a-b) \cdot z$

Загальний випадок.

$$*n.\ D_n = \begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a & 2a & \dots & 2a & y \\ b & a+b & 2a & 2a & \dots & 2a & y \\ 0 & b & a+b & 2a & \dots & 2a & y \\ 0 & 0 & b & a+b & \dots & 2a & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & z \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a & a-b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a+b & 2a & 2a & \dots & 2a & y \\ 0 & b & a+b & 2a & \dots & 2a & y \\ 0 & 0 & b & a+b & \dots & 2a & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & z \end{vmatrix} = a \cdot D_{n-1} - b(a-b) \cdot D_{n-2}.$$

$D_n = a \cdot D_{n-1} - b(a-b) \cdot D_{n-2}$. Корені характеристичного рівняння $k^2 - ak + b(a-b) = 0$: $k_1 = b$, $k_2 = a-b$.

Якщо корені характеристичного рівняння різні $(a \neq 2b)$, то

$$D_n = \frac{b^{n-1} \cdot \left(D_2 - (a-b) \cdot D_1\right) - (a-b)^{n-1} \cdot \left(D_2 - b \cdot D_1\right)}{2b - a},$$

$$D_n = \frac{b^{n-1}(2bz - xy) - (a-b)^{n-1}(az - xy)}{2b - a}.$$

Якщо корені характеристичного рівняння рівні $(a = 2b)$, то

$$D_n = a^{n-2}\cdot\left(D_2 + (n-2)(D_2 - a\cdot D_1)\right),$$
$$D_n = a^{n-2}\left(az - bz + xy + n(bz - xy)\right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

3.04.01. $$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 5$, $D_3 = 7$, $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. $k_1 = k_2 = 1$. $D_n = 2n + 1$.
3.04.02. $$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 3 & 5 & 4 & \cdots & 4 \\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5$, $D_2 = 13$, $D_3 = 41$, $D_n = 2D_{n-1} + 3D_{n-2}$. $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. $D_n = \dfrac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}$.
3.04.03. $$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \; D_1 = 5, \; D_2 = 19, \; D_3 = 77, \; D_n = 3D_{n-1} + 4D_{n-2}. \; k_1 = 4,$$

$k_2 = -1$. $D_n = \dfrac{4^n \cdot 6 - (-1)^n}{5}$.

3.04.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 6 & 7 & 6 & \cdots & 6 \\ 0 & 6 & 7 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \; D_1 = 7, \; D_2 = 13, \; D_3 = 55, \; D_n = D_{n-1} + 6D_{n-2}. \; k_1 = 3,$$

$k_2 = -2$. $D_n = \dfrac{3^{n+2} + (-2)^{n+2}}{5}$.

3.04.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \; D_1 = 1, \; D_2 = -1, \; D_3 = 1, \; D_n = 3D_{n-1} + 4D_{n-2}. \; k_1 = 4,$$

$k_2 = -1$. $D_n = (-1)^{n+1}$.

3.04.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 & \cdots & 3 \\ 6 & 7 & 6 & \cdots & 3 \\ 0 & 6 & 7 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \; D_1 = 2, \; D_2 = -4, \; D_3 = 8, \; D_n = D_{n-1} + 6D_{n-2}. \; k_1 = 3,$$

$k_2 = -2$. $D_n = -(-2)^n$.

Приклад 3.05.

Варіанта a_n задана рекурентною формулою: $a_n = a_{n-1} + a$. Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-2} + a_{n-3} & \dots & a_3 + a_2 & y \\ a_n + a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-2} + a_{n-3} & \dots & a_3 + a_2 & y \\ a_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-1} + a_{n-2} & 2a_{n-2} & a_{n-2} + a_{n-3} & \dots & a_3 + a_2 & y \\ a_{n-2} + a_{n-3} & a_{n-2} + a_{n-3} & a_{n-2} + a_{n-3} & 2a_{n-3} & \dots & a_3 + a_2 & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3 + a_2 & a_3 + a_2 & a_3 + a_2 & a_3 + a_2 & \dots & 2a_2 & y \\ x & x & x & x & \dots & x & z \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2a_3 & a_3 + a_2 & y \\ a_3 + a_2 & 2a_2 & y \\ x & x & z \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = z$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} 2a_2 & y \\ x & z \end{vmatrix} = 2a_2 z - xy$.

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} 2a_3 & a_3 + a_2 & y \\ a_3 + a_2 & 2a_2 & y \\ x & x & z \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_3 - a_2 & a_3 - a_2 & 0 \\ a_3 + a_2 & 2a_2 & y \\ x & x & z \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_3 - a_2 & 0 \\ a_3 - a_2 & 2a_2 & y \\ 0 & x & z \end{vmatrix} = -\left(a_3 - a_2\right)^2 \cdot z \ .$$

Загальний випадок.

*n.

$$D_n=\begin{vmatrix} 2a_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ a_n+a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-1}+a_{n-2} & 2a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ a_{n-2}+a_{n-3} & a_{n-2}+a_{n-3} & a_{n-2}+a_{n-3} & 2a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3+a_2 & a_3+a_2 & a_3+a_2 & a_3+a_2 & \dots & 2a_2 & y \\ x & x & x & x & \dots & x & z \end{vmatrix}=\left|I-II\to I\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_n-a_{n-1} & a_n-a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n+a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-1}+a_{n-2} & 2a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ a_{n-2}+a_{n-3} & a_{n-2}+a_{n-3} & a_{n-2}+a_{n-3} & 2a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_3+a_2 & a_3+a_2 & a_3+a_2 & a_3+a_2 & \dots & 2a_2 & y \\ x & x & x & x & \dots & x & z \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\text{елементарні}\\ \text{перетворення}\\ \text{зі стовпцями:}\\ I-II\to I\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a_n-a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_n-a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ 0 & a_{n-1}+a_{n-2} & 2a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ 0 & a_{n-2}+a_{n-3} & a_{n-2}+a_{n-3} & 2a_{n-3} & \dots & a_3+a_2 & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_3+a_2 & a_3+a_2 & a_3+a_2 & \dots & 2a_2 & y \\ 0 & x & x & x & \dots & x & z \end{vmatrix}=$$

$$=-\left(a_n-a_{n-1}\right)^2\cdot D_{n-2}=-a^2\cdot D_{n-2}\,.$$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$D_n=-\left(a_n-a_{n-1}\right)^2\cdot D_{n-2}=-a^2\cdot D_{n-2}$</td></tr>
<tr><td align="center">$n=2k$</td><td align="center">$n=2k+1$</td></tr>
<tr><td>$D_4=-a^2D_2,$
$D_6=-a^2D_4=a^4D_2,$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$
$D_{2k}=\left(-1\right)^{k+1}a^{2k-2}D_2=\left(-1\right)^{k+1}a^{2k-2}\left(2a_2z-xy\right).$</td><td>$D_3=-a^2D_1,$
$D_5=-a^2D_3=a^4D_1,$
$D_7=-a^2D_5=-a^6D_1,$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$
$D_{2k+1}=\left(-1\right)^k a^{2k}D_1=\left(-1\right)^k a^{2k}z.$</td></tr>
</table>

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

3.05.01. $$a_n = n,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ 2n-3 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix},$ $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = -2. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n 2$. $D_{2n} = (-1)^n$.
3.05.02. $$a_n = n + 1/2\ ,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n & 2n-2 & \cdots & 4 \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 4 \\ 2n-2 & 2n-2 & 2n-3 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix},$ $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = -3. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n 3$. $D_{2n} = (-1)^n$.
3.05.03. $$a_n = 2n - 3/2,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 4n-3 & 4n-5 & 4n-9 & \cdots & 3 \\ 4n-5 & 4n-7 & 4n-9 & \cdots & 3 \\ 4n-9 & 4n-9 & 4n-11 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix},$ $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -4,, \\ D_3 = -4. \end{matrix}$ $D_n = -4 \cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 4^n$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 4^n$.

3.05.04.

$$a_n = 3n - \tfrac{5}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 6n-5 & 6n-8 & 6n-14 & \cdots & 4 \\ 6n-8 & 6n-11 & 6n-14 & \cdots & 4 \\ 6n-14 & 6n-14 & 6n-17 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 13 & 10 & 4 \\ 10 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -9,, \\ D_3 = -9. \end{matrix}$ $D_n = -9 \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 9^n$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 9^n$.

3.05.05.

$$a_n = 3n - \tfrac{1}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 6n-1 & 6n-4 & 6n-10 & \cdots & 8 \\ 6n-4 & 6n-7 & 6n-10 & \cdots & 8 \\ 6n-10 & 6n-10 & 6n-13 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 8 & 8 & 8 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 17 & 14 & 8 \\ 14 & 11 & 8 \\ 8 & 8 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 5, \\ D_2 = -9, \\ D_3 = -45. \end{matrix}$, $D_n = -9 \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 9^n \cdot 5$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 9^n$.

3.05.06.

$$a_n = 3n - 1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 6n-2 & 6n-5 & 6n-11 & \cdots & 7 \\ 6n-5 & 6n-8 & 6n-11 & \cdots & 7 \\ 6n-11 & 6n-11 & 6n-14 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 7 & 7 & 7 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 16 & 13 & 7 \\ 13 & 10 & 7 \\ 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 4, \\ D_2 = -9, \\ D_3 = -36. \end{matrix}$, $D_n = -9 \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 9^n \cdot 4$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 9^n$.

Приклад 3.06.

Нехай варіанти a_n і b_n такі, що $\begin{cases} a_n - b_{n-1} = c, \\ b_n - a_{n-1} = d \end{cases}$. Показати, що визначник

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_{n-1} + b_{n-2} & b_{n-1} + b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}$$

задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку зі сталими коефіцієнтами $D_n = -c \cdot d \cdot D_{n-2}$. Отримати його значення в явному вигляді.

Розв'язання.

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1 + b_1$.

*2. $$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| \; I - II \to I \; \right| = \begin{vmatrix} a_2 - b_1 & a_2 - b_1 \\ b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 0 & a_2 - b_1 \\ b_2 - a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ d & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = -cd .$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + a_2 & a_2 + a_1 \\ b_3 + b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| \; I - II \to I \; \right| = \begin{vmatrix} a_3 - b_2 & a_3 - b_2 & 0 \\ b_3 + b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 0 & a_3 - b_2 & 0 \\ b_3 - a_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ 0 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ d & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ 0 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = -cd \cdot \left(a_1 + b_1 \right).$$

Загальний випадок.

*n. $D_n=\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ b_n+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ b_{n-1}+b_{n-2} & b_{n-1}+b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+b_1 & b_2+b_1 & b_2+b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\left|I-II\to I\right|=$

$$=\begin{vmatrix} a_n-b_{n-1} & a_n-b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ b_{n-1}+b_{n-2} & b_{n-1}+b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+b_1 & b_2+b_1 & b_2+b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-II\to I \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ d & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 0 & b_{n-1}+b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_2+b_1 & b_2+b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=-cd\cdot D_{n-2}.$$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$D_n=-cd\cdot D_{n-2}$</td></tr>
<tr><td align="center">$n=2k$</td><td align="center">$n=2k+1$</td></tr>
<tr><td>$D_4=-cd\cdot D_2=\left(cd\right)^2$,
$D_6=-cd\cdot D_4=-\left(cd\right)^3$,
…………………………,
$D_{2k}=\left(-1\right)^k c^k d^k$.</td><td>$D_3=-cd\cdot D_1=-cd\left(a_1+b_1\right)$,
$D_5=-cd\cdot D_3=\left(-cd\right)^2\left(a_1+b_1\right)$,
………………………………,
$D_{2k+1}=\left(-1\right)^k c^k d^k\left(a_1+b_1\right)$.</td></tr>
</table>

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

3.06.01.

$$a_n = n, \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-3 & \cdots & 3 \\ 2n-3 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = -2. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 2$. $D_{2n} = (-1)^n$.

3.06.02.

$$a_n = n + \frac{3}{2}, \quad b_n = n - \frac{1}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n+2 & 2n & \cdots & 6 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n & \cdots & 6 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-3 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 3$, $D_3 = 9$, $D_n = 3 \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n-1} = 3^n$. $D_{2n} = 3^n$.

3.06.03.

$$a_n = 2n - \frac{1}{2}, \quad b_n = 2n - \frac{1}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-1 & 4n-3 & 4n-7 & \cdots & 5 \\ 4n-3 & 4n-5 & 4n-7 & \cdots & 5 \\ 4n-7 & 4n-7 & 4n-9 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 9 & 5 \\ 9 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = -4$, $D_3 = -12$, $D_n = -4 \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 4^n \cdot 3$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 4^n$.

3.06.04.

$$a_n = 2n, \quad b_n = 2n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-1 & 4n-2 & 4n-6 & \cdots & 6 \\ 4n-4 & 4n-5 & 4n-6 & \cdots & 6 \\ 4n-8 & 4n-8 & 4n-9 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 10 & 6 \\ 8 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = -3, \\ D_3 = --9 \end{matrix}$ $\quad D_n = -3 \cdot D_{n-2}$,

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 3^{n+1}$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 3^n$.

3.06.05.

$$a_n = 2n - \frac{1}{2}, \quad b_n = 2n - \frac{3}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-2 & 4n-3 & 4n-7 & \cdots & 5 \\ 4n-5 & 4n-6 & 4n-7 & \cdots & 5 \\ 4n-9 & 4n-9 & 4n-10 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 9 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = -3, \\ D_3 = -6. \end{matrix}$ $\quad D_n = -3 \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 3^n \cdot 2$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 3^n$.

3.06.06.

$$a_n = \frac{6n-1}{4}, \quad b_n = \frac{6n-3}{4},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & 3n-2 & 3n-5 & \cdots & 4 \\ 3n-3 & 3n-4 & 3n-5 & \cdots & 4 \\ 3n-6 & 3n-6 & 3n-7 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = -2$, $D_3 = -4$, $D_n = -2D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n\, 2^{n+1}$. $D_{2n} = (-1)^n\, 2^n$.

Приклад 3.07.

Нехай варіанти a_n і b_n такі, що $\begin{cases} a_n - a_{n-1} = c, \\ b_n - b_{n-1} = d \end{cases}$. Показати, що визначник

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_n + a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_{n-1} + a_{n-2} & b_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}$$

задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку зі сталими коефіцієнтами $D_n = -c \cdot d \cdot D_{n-2}$. Отримати його значення в явному вигляді.

Розв'язання.

Згідно з умовою, $a_n = c \cdot n + p, b_n = d \cdot n + q$, де сталі p і $q-$ початкові значення варіант.

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1 = a_1 + b_1$.

*2. $$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2 - a_1 \\ b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I\text{ - }II \to I \end{matrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \\ d & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = -cd .$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_3 + a_2 & a_2 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_3 - a_2 & a_3 - a_2 & 0 \\ b_3 + a_2 & a_2 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I\text{ - }II \to I \end{matrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & a_3 - a_2 & 0 \\ b_3 - b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + b_1 \\ 0 & b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ d & a_2 + b_2 & a_2 + b_1 \\ 0 & b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = -cd \cdot \left(a_1 + b_1 \right).$$

Загальний випадок.

$$*\text{n.}\quad D_n=\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ b_n+a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ b_{n-1}+a_{n-2} & b_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+a_1 & b_2+a_1 & b_2+a_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\left| I-II\to I \right|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_n-a_{n-1} & a_n-a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n+a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ b_{n-1}+a_{n-2} & b_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+a_1 & b_2+a_1 & b_2+a_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I\text{ - }II\to I \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ d & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ 0 & b_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_2+a_1 & b_2+a_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=-cd\cdot D_{n-2}.$$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$D_n=-cd\cdot D_{n-2}$</td></tr>
<tr><td align="center">$n=2k$</td><td align="center">$n=2k+1$</td></tr>
<tr><td>$D_4=-cd\cdot D_2=(cd)^2$,
$D_6=-cd\cdot D_4=-(cd)^3$,
…………………………,
$D_{2k}=(-1)^k c^k d^k$.</td><td>$D_3=-cd\cdot D_1=-cd(a_1+b_1)$,
$D_5=-cd\cdot D_3=(-cd)^2(a_1+b_1)$,
………………………………,
$D_{2k+1}=(-1)^k c^k d^k(a_1+b_1)$.</td></tr>
</table>

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

3.07.01. $a_n=n+2,\quad b_n=n,$ $D_n=\begin{vmatrix} 2n+2 & 2n+1 & 2n-1 & \cdots & 5 \\ 2n+1 & 2n & 2n-1 & \cdots & 5 \\ 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$

$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 4, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = -4. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 4$. $D_{2n} = (-1)^n$.
3.07.02. $$a_n = n-1, \quad b_n = n-1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n-2 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-5 & 2n-5 & 2n-6 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 0, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = 0. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-2}$. $D_{2n+1} = 0$. $D_{2n} = (-1)^n$.
3.07.03. $$a_n = n - \frac{1}{2}, \quad b_n = n - \frac{1}{2},$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ 2n-2 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -1, \\ D_3 = -1. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n$. $D_{2n} = (-1)^n$.
3.07.04. $$a_n = 2n-2, \quad b_n = n,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-3 & 3n-6 & \cdots & 3 \\ 3n-4 & 3n-5 & 3n-6 & \cdots & 3 \\ 3n-7 & 3n-7 & 3n-8 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -2, \\ D_3 = -2. \end{matrix}$ $D_n = -2 \cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 2^n$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 2^n$.

3.07.05. $$a_n = 3n-3,\quad b_n = n,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 4n-3 & 4n-4 & 4n-8 & \cdots & 4 \\ 4n-6 & 4n-7 & 4n-8 & \cdots & 4 \\ 4n-10 & 4n-10 & 4n-11 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -3, \\ D_3 = -3. \end{matrix}$ $D_n = -3 \cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 3^n$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 3^n$.
3.07.06. $$a_n = 5n-4,\quad b_n = n-1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 6n-5 & 6n-6 & 6n-12 & \cdots & 6 \\ 6n-10 & 6n-11 & 6n-12 & \cdots & 6 \\ 6n-16 & 6n-16 & 6n-17 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 13 & 12 & 6 \\ 8 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = -5, \\ D_3 = -5. \end{matrix}$ $D_n = -5 \cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 5^n$. $D_{2n} = (-1)^n \cdot 5^n$.

Розглянемо інший метод розв’язування цієї задачі. Варіанти $U_n = \alpha^n$ і $V_n = n\alpha^n$ – лінійно незалежні розв’язки рекурентного співвідношення $D_n = 2\alpha \cdot D_{n-1} - \alpha^2 \cdot D_{n-2}$:

$$U_n:\quad \alpha^n = 2\alpha \cdot \alpha^{n-1} - \alpha^2 \cdot \alpha^{n-2},$$

$$V_n:\quad n\alpha^n = 2\alpha \cdot (n-1) \cdot \alpha^{n-1} - \alpha^2 \cdot (n-2) \cdot \alpha^{n-2}.$$

Розв’язок задачі Коші треба шукати у вигляді лінійної комбінації частинних розв’язків: $D_n = C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n$. Коефіцієнти C_u і C_u визначаються початковими умовами.

Розглянемо інший метод розв’язування рекурентного співвідношення $D_n = (\alpha + \beta) \cdot D_{n-1} - \alpha\beta \cdot D_{n-2}$.

1-й випадок. Корені характеристичного рівняння співпадають $\alpha = \beta$. Варіанти $U_n = \alpha^n$ і $V_n = n\alpha^n$ – лінійно незалежні розв’язки рекурентного співвідношення $D_n - 2\alpha \cdot D_{n-1} + \alpha^2 \cdot D_{n-2} = 0$. Дійсно, рівність $C_1 \cdot U_n + C_2 \cdot V_n = 0$ можливо тільки тоді, коли $C_1 = 0$ та $C_2 = 0$, що означає лінійну незалежність варіант $U_n = \alpha^n$ та $V_n = n\alpha^n$. Далі,

$$U_n - 2\alpha \cdot U_{n-1} + \alpha^2 \cdot U_{n-2} = \alpha^n - 2\alpha \cdot \alpha^{n-1} + \alpha^2 \cdot \alpha^{n-2} = 0,$$

$$V_n - 2\alpha \cdot V_{n-1} + \alpha^2 \cdot V_{n-2} = n \cdot \alpha^n - 2\alpha \cdot (n-1) \cdot \alpha^{n-1} + \alpha^2 \cdot (n-2) \cdot \alpha^{n-2} = 0.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $D_n = \alpha^n \cdot (A + n \cdot B)$.

2-***й випадок.*** Характеристичне рівняння має два різні корені $\alpha \neq \beta$. Варіанти $U_n = \alpha^n$ і $V_n = \beta^n$ – лінійно незалежні розв'язки рекурентного співвідношення $D_n - (\alpha + \beta) \cdot D_{n-1} + \alpha \cdot \beta \cdot D_{n-2} = 0$. Дійсно, варіанти $U_n = \alpha^n$ та $V_n = \beta^n$ не задовольняють рівності $C_1 \cdot U_n + C_2 \cdot V_n = 0$, коли $\{C_{1,} \ C_2\} \neq 0$. Далі,

$$U_n - (\alpha + \beta) \cdot U_{n-1} + \alpha\beta \cdot U_{n-2} = \alpha^n - (\alpha + \beta) \cdot \alpha^{n-1} + \alpha\beta \cdot \alpha^{n-2} = 0,$$

$$V_n - (\alpha + \beta) \cdot V_{n-1} + \alpha\beta \cdot V_{n-2} = \beta^n - (\alpha + \beta) \cdot \beta^{n-1} + \alpha\beta \cdot \beta^{n-2} = 0.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $D_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$.

3-***й випадок.*** Характеристичне рівняння має комплексні корені $\alpha = m \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$, $\beta = m \cdot (\cos t - i \cdot \sin t)$. В цьому випадку, для побудови загального розв'язку рекурентного співвідношення використовують такі дві лінійно незалежні варіанти: $U_n = m^n \cdot \cos(n \cdot t)$ и $V_n = m^n \cdot \sin(n \cdot t)$. Оскільки $U_n = \dfrac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ та $V_n = \dfrac{\beta^n - \alpha^n}{2} i$, то обидві варіанти є частковими розв'язками нашого рекурентного співвідношення. Таким чином, загальний розв'язок має вигляд: $D_n = m^n \cdot \big(A \cdot \cos(n \cdot t) + B \cdot \sin(n \cdot t)\big)$.

Приклад 3.08.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} 12n+11 & 12n+5 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 12n & 12n-1 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 12n-12 & 12n-12 & 12n-13 & \cdots & 29 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 24 & 24 & 24 & \cdots & 23 \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} 47 & 41 & 29 \\ 36 & 35 & 29 \\ 24 & 24 & 23 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1 = 23$.

*2. $$D_2 = \begin{vmatrix} 35 & 29 \\ 24 & 23 \end{vmatrix} = \left| \, I - II \to I \, \right| = \begin{vmatrix} 11 & 6 \\ 24 & 23 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I \text{ - } II \to I \end{matrix} \right| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 23 \end{vmatrix} = 109.$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} 47 & 41 & 29 \\ 36 & 35 & 29 \\ 24 & 24 & 23 \end{vmatrix} = \left| \, I - II \to I \, \right| = \begin{vmatrix} 11 & 6 & 0 \\ 36 & 35 & 29 \\ 24 & 24 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I \text{ - } II \to I \end{matrix} \right| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 35 & 29 \\ 0 & 24 & 23 \end{vmatrix} = 5 \cdot D_2 - 6 \cdot D_1 = 5 \cdot 109 - 6 \cdot 23 = 407.$$

Загальний випадок.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} 12n+11 & 12n+5 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 12n & 12n-1 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 12n-12 & 12n-12 & 12n-13 & \cdots & 29 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 24 & 24 & 24 & \cdots & 23 \end{vmatrix} = \left| \, I - II \to I \, \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ 12n & 12n-1 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 12n-12 & 12n-12 & 12n-13 & \cdots & 29 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 24 & 24 & 24 & \cdots & 23 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I \text{ - } II \to I \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 12n-1 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 0 & 12n-12 & 12n-13 & \cdots & 29 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 24 & 24 & \cdots & 23 \end{vmatrix} = 5 \cdot D_{n-1} - 6 \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = 5\cdot D_{n-1} - 6\cdot D_{n-2}.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ має різні корені $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Загальний розв'язок рекурентного співвідношення має вигляд: $D_n = A\cdot 3^n + B\cdot 2^n$, де коефіцієнти A та B мають задовольняти системі:

$$\begin{cases} D_1 = 3A + 2B = 23; \\ D_2 = 9A + 4B = 109, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 21; \\ B = -20. \end{cases}.$$

Таким чином, $D_n = 21\cdot 3^n - 20\cdot 2^n$. Контрольна точка: $D_3 = 21\cdot 3^3 - 20\cdot 2^3 = 21\cdot 27 - 20\cdot 8 = 407$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

3.08.01. $$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n & \cdots & 3 \\ n+1 & n & n & \cdots & 3 \\ n & n & n-1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = -3, \\ D_3 = 1. \end{matrix}$ $D_n = -D_{n-1} - D_{n-2}$. $D_n = A\cdot\cos\frac{2\pi n}{3} + B\cdot\sin\frac{2\pi n}{3}$. $\begin{cases} D_1 = -\frac{1}{2}\cdot A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot B = 2, \\ D_2 = -\frac{1}{2}\cdot A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot B = -3 \end{cases}$. $D_n = \cos\frac{2\pi n}{3} + \frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{2\pi n}{3}$.
3.08.02. $$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+1 & \cdots & 4 \\ n+1 & n & n+1 & \cdots & 4 \\ n & n & n-1 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = -6, \\ D_3 = 8. \end{matrix} \quad D_n = -2 \cdot D_{n-1} - 2 \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(A \cdot \cos\frac{3\pi\, n}{4} + B \cdot \sin\frac{3\pi\, n}{4} \right).$$

$$\begin{cases} D_1 = -A + B = 2, \\ D_2 = 0 \cdot A - 2 \cdot B = -6 \end{cases}. \quad D_n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\cos\frac{3\pi\, n}{4} + 3 \cdot \sin\frac{3\pi\, n}{4} \right).$$

3.08.03.

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & n+3 & n+2 & \cdots & 5 \\ n+1 & n & n+2 & \cdots & 5 \\ n & n & n-1 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = -9, \\ D_3 = 21. \end{matrix} \quad D_n = -3 \cdot D_{n-1} - 3 \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = 3^{\frac{n}{2}} \cdot \left(A \cdot \cos\frac{5\pi\, n}{6} + B \cdot \sin\frac{5\pi\, n}{6} \right).$$

$$\begin{cases} D_1 = -\frac{3}{2} \cdot A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot B = 2, \\ D_2 = \frac{3}{2} \cdot A - \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot B = -9 \end{cases}. \quad D_n = 3^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\cos\frac{5\pi\, n}{6} + \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \sin\frac{5\pi\, n}{6} \right).$$

3.08.04.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 3n-4 & 3n-7 & \cdots & 2 \\ 3n-4 & 3n-5 & 3n-7 & \cdots & 2 \\ 3n-7 & 3n-7 & 3n-8 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = -1. \end{matrix} \quad D_n = D_{n-1} - D_{n-2}. \ D_n = A \cdot \cos\frac{\pi\, n}{3} + B \cdot \sin\frac{\pi\, n}{3}.$$

$$\begin{cases} D_1 = \frac{1}{2}\cdot A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot B = 1, \\ D_2 = -\frac{1}{2}\cdot A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot B = 0 \end{cases}. \quad D_n = -\cos\frac{\pi n}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\pi n}{3}.$$

3.08.05.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5n-4 & 5n-7 & 5n-12 & \cdots & 3 \\ 5n-8 & 5n-9 & 5n-12 & \cdots & 3 \\ 5n-13 & 5n-13 & 5n-14 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = -2. \end{matrix}$ $\quad D_n = 2\cdot D_{n-1} - 2\cdot D_{n-2}$.

$$D_n = 2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(A\cdot\cos\frac{\pi n}{4} + B\cdot\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

$$\begin{cases} D_1 = A + B = 1, \\ D_2 = 0\cdot A + 2\cdot B = 0 \end{cases}. \quad D_n = 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{\pi n}{4}.$$

3.08.06.

$$D_n = \begin{vmatrix} 7n-6 & 7n-10 & 7n-17 & \cdots & 4 \\ 7n-12 & 7n-13 & 7n-17 & \cdots & 4 \\ 7n-19 & 7n-19 & 7n-17 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 15 & 11 & 4 \\ 9 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = -3. \end{matrix}$ $\quad D_n = 3\cdot D_{n-1} - 3\cdot D_{n-2}$.

$$D_n = 3^{\frac{n}{2}}\cdot\left(A\cdot\cos\frac{\pi n}{6} + B\cdot\sin\frac{\pi n}{6}\right).$$

$$\begin{cases} D_1 = \frac{3}{2}\cdot A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot B = 1, \\ D_2 = \frac{3}{2}\cdot A + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot B = 0 \end{cases}. \quad D_n = 3^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\cos\frac{\pi n}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\pi n}{6}\right).$$

3.08.07.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & 2n+1 & 2n-1 & \cdots & 5 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 5 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-3 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 5, \\ D_3 = 11. \end{matrix}$ $D_n = D_{n-1} + 2 \cdot D_{n-2}$. $D_n = (-1)^n \cdot A + 2^n \cdot B$.

$\begin{cases} D_1 = -A + 2 \cdot B = 3, \\ D_2 = A + 4 \cdot B = 5 \end{cases}$. $D_n = \dfrac{2^{n+2} - (-1)^n}{3}$.

3.08.08.

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-1 & 4n-4 & 4n-8 & \cdots & 4 \\ 4n-4 & 4n-5 & 4n-8 & \cdots & 4 \\ 4n-8 & 4n-8 & 4n-9 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 5, \\ D_3 = 7. \end{matrix}$ $D_n = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}$. $D_n = A + n \cdot B$.

$\begin{cases} D_1 = A + B = 3, \\ D_2 = A + 2B = 5 \end{cases}$. $D_n = 1 + 2n$.

3.08.09.

$$D_n = \begin{vmatrix} 6n-5 & 6n-9 & 6n-15 & \cdots & 3 \\ 6n-10 & 6n-11 & 6n-15 & \cdots & 3 \\ 6n-16 & 6n-16 & 6n-17 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 13 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 1. \end{matrix}$ $D_n = 3 \cdot D_{n-1} - 2 \cdot D_{n-2}$. $D_n = A + 2^n \cdot B$.

$\begin{cases} D_1 = A + 2 \cdot B = 1, \\ D_2 = A + 4 \cdot B = 1 \end{cases}$. $D_n = 1$.

3.08.10.

$$D_n = \begin{vmatrix} 6n-3 & 6n-7 & 6n-13 & \cdots & 5 \\ 6n-8 & 6n-9 & 6n-13 & \cdots & 5 \\ 6n-14 & 6n-14 & 6n-15 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 15 & 11 & 5 \\ 10 & 9 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 7, \\ D_3 = 15. \end{matrix}$ $D_n = 3 \cdot D_{n-1} - 2 \cdot D_{n-2}$. $D_n = A + 2^n \cdot B$.

$\begin{cases} D_1 = A + 2 \cdot B = 3, \\ D_2 = A + 4 \cdot B = 7 \end{cases}$. $D_n = 2^{n+1} - 1$.

Приклад 3.09.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} c & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} c & a & a^2 \\ b & c & a \\ b^2 & b & c \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = c$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} = c^2 - a \cdot b$.

*3.

$$D_3 = \begin{vmatrix} c & a & a^2 \\ b & c & a \\ b^2 & b & c \end{vmatrix} = \left| I - a \cdot II \to I \right| = \begin{vmatrix} c - ab & a - ac & 0 \\ b & c & a \\ b^2 & b & c \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - b \cdot II \to I \end{array} \right| =$$

$$=\begin{vmatrix} c-2ab+abc & a(1-c) & 0 \\ b(1-c) & c & a \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = (c-2ab+abc)\cdot D_2 - ab(1-c)^2 \cdot D_1 =$$

$$=(c-2ab+abc)(c^2-ab)-abc(1-c)^2 = c^3+2a^2b^2-2abc-a^2b^2c.$$

Загальний випадок.

*n.

$$D_n = \begin{vmatrix} c & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix} = \left| I - a\cdot II \to I \right| = \begin{vmatrix} c-ab & a-ac & 0 & \ldots & 0 \\ b & c & a & \ldots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \ldots & a^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^{b-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \ldots & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - b\cdot II \to I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-2ab+ac & a-ac & 0 & \ldots & 0 \\ b-bc & c & a & \ldots & a^{n-2} \\ 0 & b & c & \ldots & a^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b^{n-2} & b^{n-3} & \ldots & c \end{vmatrix} =$$

$$=(c-2ab+abc)\cdot D_{n-1} - ab(1-c)^2 \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = (c-2ab+abc)\cdot D_{n-1} - ab(1-c)^2\cdot D_{n-2}.$$

Розглянемо декілька окремих випадків.

**1. $c=1$. Варіанта D_n задовольняє рекурентному співвідношенню першого порядку $D_n = (1-ab)\cdot D_{n-1}$. Цей випадок було розглянуто докладно раніше (розділ_ приклад_). Загальний розв'язок: $D_n = (1-ab)^{n-1}$.

**2. $c=2$. Варіанта D_n задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку $D_n = 2\cdot D_{n-1} - ab\cdot D_{n-2}$. Його характеристичне рівняння $k^2-2k+ab=0$. Якщо $ab=1$, то рівняння має кратні корені $k_1=k_2=1$. В цьому випадку $D_n = A + B\cdot n$. Оскільки $D_1 = 2$ та $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a^{-1} & 2 \end{vmatrix} = 3$, то $D_n = n+1$. Якщо $ab>1$, то рівняння має комплексно спряжені корені $k_{1,2} = 1 \pm i\cdot\sqrt{ab-1} = \sqrt{ab}\cdot\left(\cos \operatorname{arctg}\sqrt{ab-1} \pm \sin \operatorname{arctg}\sqrt{ab-1}\right)$. Позначивши

$f=\operatorname{arctg}\sqrt{ab-1}$, отримаємо $D_n=(ab)^{\frac{n}{2}}\left(A\cdot\cos(nf)+B\cdot\sin(nf)\right)$. Коефіцієнти A і B визначаються початковими умовами $D_1=2$, $D_2=4-ab$.

Окремі випадки.

1. $ab=2$. $\begin{cases} D_n=2D_{n-1}-2D_{n-2}, \\ D_1=2, \\ D_2=2. \end{cases}$ # $\begin{matrix} k_{1,2}=1\pm i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ D_n=2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{matrix}$.

2. $ab=4$. $\begin{cases} D_n=2D_{n-1}-4D_{n-2}, \\ D_1=2, \\ D_2=0. \end{cases}$ # $\begin{matrix} k_{1,2}=1\pm i\sqrt{3}=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right), \\ D_n=2^n\cdot\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right). \end{matrix}$

3. $ab=\frac{4}{3}$. $\begin{cases} D_n=2D_{n-1}-\frac{4}{3}D_{n-2}, \\ D_1=2, \\ D_2=\frac{8}{3}. \end{cases}$ # $\begin{matrix} k_{1,2}=1\pm i\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right), \\ D_n=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cdot\left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right). \end{matrix}$

**3. $c=\frac{2ab}{1+ab}$. Варіанта D_n задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку $D_n=-ab\cdot\left(\frac{1-ab}{1+ab}\right)^2\cdot D_{n-2}$. Ця рекурентна формула рівносильна сукупності двох співвідношень $\left[\begin{array}{l} D_{2n+1}=-ab\cdot\left(\frac{1-ab}{1+ab}\right)^2\cdot D_{2n-1}; \\ D_{2n}=-ab\cdot\left(\frac{1-ab}{1+ab}\right)^2\cdot D_{2n-2}. \end{array}\right.$

Враховуючи початкові умови $\left[\begin{array}{l} D_1 = \dfrac{2ab}{1+ab}; \\ D_2 = -ab \cdot \left(\dfrac{1-ab}{1+ab}\right)^2, \end{array}\right.$ отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} D_{2k+1} = (-1)^k \dfrac{2(ab)^{k+1}}{1+ab} \cdot \left(\dfrac{1-ab}{1+ab}\right)^{2k}; \\ D_{2k} = (-1)^k \cdot (ab)^k \cdot \left(\dfrac{1-ab}{1+ab}\right)^{2k}. \end{array}\right.$$

**4. Нехай $\alpha, \beta -$ корені характеристичного рівняння $k^2 - (c - 2ab + abc)k + ab \cdot (1-c)^2 = 0$.

$$\alpha = \frac{(c-2ab+abc)}{2} + \sqrt{\frac{(c-2ab+abc)^2}{4} - ab(1-c)^2},$$

$$\beta = \frac{(c-2ab+abc)}{2} - \sqrt{\frac{(c-2ab+abc)^2}{4} - ab(1-c)^2}.$$

Рекурентне співвідношення приймає вигляд: $D_n = (\alpha + \beta) \cdot D_{n-1} - \alpha\beta \cdot D_{n-2}$.
Можливі два випадки:

1-й випадок. Характеристичне рівняння має різні корені $\alpha \neq \beta$. Розв'язок задачі Коші будемо шукати у вигляді лінійної комбінації $D_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$. Враховуючи початкові умови, для A і B складаємо систему $\begin{cases} A \cdot \alpha + B \cdot \beta = c = D_1; \\ A \cdot \alpha^2 + B \cdot \beta^2 = c^2 - ab = D_2. \end{cases}$ Отже, $A = \dfrac{c\beta - c^2 + ab}{\alpha \cdot (\beta - \alpha)}$, $B = \dfrac{c^2 - ab - c\alpha}{\beta \cdot (\beta - \alpha)}$.

2-й випадок. Характеристичне рівняння має рівні корені $\alpha = \beta$. Розв'язок задачі Коші будемо шукати у вигляді $D_n = (A + B \cdot n) \cdot \alpha^n$. Враховуючи початкові умови, для A і B складаємо систему $\begin{cases} (A+B) \cdot \alpha = c = D_1; \\ (A+2B) \cdot \alpha^2 = c^2 - ab = D_2. \end{cases}$.

Отже, $A = \dfrac{2c\alpha - c^2 + ab}{\alpha^2}$, $B = \dfrac{c^2 - ab - c\alpha}{\alpha^2}$.

Вправи

3.09.01.

$$a=1,\quad b=2,\quad c=4/3,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 4/3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4/3 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & 2 & 4/3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 4/3 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 4/3 & 1 & 1 \\ 2 & 4/3 & 1 \\ 4 & 2 & 4/3 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1=4/3, \\ D_2=-2/9, \\ D_3=-8/27. \end{array}$ $\quad D_n=-\dfrac{2}{9}\cdot D_{n-2}\cdot$ $\left[\begin{array}{l} D_{2n+1}=(-1)^n\dfrac{2^{n+2}}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n}, \\ D_{2n}=(-1)^n\cdot 2^n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n}. \end{array}\right.$.

3.09.02.

$$a=3/2,\quad b=2,\quad c=3/2,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 3/2 & 3/2 & (3/2)^2 & \cdots & (3/2)^{n-1} \\ 2 & 3/2 & 3/2 & \cdots & (3/2)^{n-2} \\ 4 & 2 & 3/2 & \cdots & (3/2)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 3/2 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 3/2 & 3/2 & 9/4 \\ 2 & 3/2 & 3/2 \\ 4 & 2 & 3/2 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1=3/2, \\ D_2=-3/4, \\ D_3=-9/8. \end{array}$ $\quad D_n=-\dfrac{3}{4}\cdot D_{n-2}\cdot$ $\left[\begin{array}{l} D_{2n+1}=(-1)^n 2\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}, \\ D_{2n}=(-1)^n\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}. \end{array}\right.$.

3.09.03.

$$a=1,\quad b=9,\quad c=3,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 9 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 81 & 9 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 9^{n-1} & 9^{n-2} & 9^{n-3} & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 81 & 9 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1=3,$ $D_2=0,$ $D_3=-108.$ $D_n=12\cdot D_{n-1}-36\cdot D_{n-2}, k_1=k_2=6,$ $D_n=\dfrac{2-n}{2}\cdot 6^n.$

3.9.04.

$$a=2,\quad b=2,\quad c=4,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 2 & 4 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 4 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1=4,$ $D_2=12,$ $D_3=0.$ $D_n=12\cdot D_{n-1}-36\cdot D_{n-2}.$ $k_1=k_2=6$ $D_n=\dfrac{3-n}{3}\cdot 6^n$ ..

3.09.05.

$$a=2,\quad b=5,\quad c=3,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-1} \\ 5 & 3 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ 25 & 5 & 3 & \cdots & 2^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5^{n-1} & 5^{n-2} & 5^{n-3} & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 25 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1=3,$ $D_2=-1,$ $D_3=-133.$

$D_n=13\cdot D_{n-1}-40\cdot D_{n-2}.$

$k_1=5,\quad k_2=8$

$D_n=\dfrac{5\cdot 5^n-2\cdot 8^n}{3}$ ..

3.09.06.

$$a=1,\quad b=3,\quad c=5,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 9 & 3 & 5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{n-1} & 3^{n-2} & 3^{n-3} & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1=5, \\ D_2=22, \\ D_3=68. \end{matrix}$

$$D_n=14\cdot D_{n-1}-48\cdot D_{n-2}$$

$$D_n=\frac{3\cdot 6^n-8^n}{2}\qquad .$$

$$k_1=6,\quad k_2=8.$$

§ 4. Рекурентні співвідношення другого порядку зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо інші методи розв'язування трьох діагональних визначників.

Приклад 4.01.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_3 & 0 \\ b_2 & a_2+b_2 & a_2 \\ 0 & b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розклавши визначник за елементами першого рядка, дістанемо однорідне лінійне рекурентне співвідношення другого порядку

$$D_n = \left(a_n + b_n\right) D_{n-1} - a_n b_{n-1} D_{n-2}.$$

Рекурентне співвідношення можна записати у вигляді

$$D_n - b_n \cdot D_{n-1} = a_n \cdot \left(D_{n-1} - b_{n-1} \cdot D_{n-2}\right).$$

Зробивши заміну $Z_n = D_n - b_n \cdot D_{n-1}$, дістанемо рекурентне співвідношення першого порядку відносно варіанти Z_n: $Z_n = a_n \cdot Z_{n-1}$.

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} Z_n = a_n \cdot Z_{n-1}; \\ Z_2 = D_2 - b_2 \cdot D_1. \end{cases}$$

$$Z_3 = \left(D_2 - b_2 \cdot D_1\right) \cdot a_3,$$
$$Z_4 = Z_3 \cdot a_4 = \left(D_2 - b_2 \cdot D_1\right) \cdot a_3 \cdot a_4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Z_n = \left(D_2 - b_2 \cdot D_1\right) \cdot \prod_{m=3}^{n} a_m.$$

Остаточно маємо

$$D_n - b_n \cdot D_{n-1} = \left(D_2 - b_2 \cdot D_1\right) \cdot \prod_{m=3}^{n} a_m ,$$

$$D_n = b_n \cdot D_{n-1} + \left(D_2 - b_2 \cdot D_1\right) \cdot \prod_{m=3}^{n} a_m .$$

Припустивши, що $D_n = U_n \cdot \prod_{m=2}^{n} b_m$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення $U_n = U_{n-1} + \left(\frac{D_2}{b_2} - D_1\right) \cdot \prod_{m=3}^{n} \frac{a_m}{b_m}$.

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + \left(\dfrac{D_2}{b_2} - D_1\right) \cdot \prod\limits_{m=3}^{n} \dfrac{a_m}{b_m}; \\ U_1 = D_1. \end{cases}$$

Звідси,

$$U_n = D_1 + \left(\frac{D_2}{b_2} - D_1\right) \cdot \sum_{j=2}^{n} \prod_{m=3}^{j} \frac{a_m}{b_m} \quad \Rightarrow \quad D_n = \left(D_1 + \left(\frac{D_2}{b_2} - D_1\right) \cdot \sum_{j=2}^{n} \prod_{m=3}^{j} \frac{a_m}{b_m}\right) \cdot \prod_{m=2}^{n} b_m . \, .$$

Враховуючи початкові умови $D_1 - a_1 + b_1$ і $D_2 = \left(a_2 + b_2\right) \cdot \left(a_1 + b_1\right) - a_2 b_1$, отримаємо $D_n = \left(1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}\right) \cdot \prod_{m=1}^{n} b_m$.

Остаточно маємо $D_n = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{m=1}^{j} \frac{a_m}{b_m}\right) \cdot \prod_{m=1}^{n} b_m$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.01.01.

$$a_n = n, \quad b = n + 1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 2n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} .$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \ D_1 = 3, \ D_2 = 11, \ D_3 = 50, \ D_n = (2n+1) \cdot D_{n-1} + n^2 \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \right) \cdot (n+1)!.$$

4.01.02.

$$a_n = 2n-1, \quad b = 2n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n & 2n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-1 & 4n-4 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-3 & 4n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \ D_1 = 4, \ D_2 = 23, \ D_3 = 176, \ D_n = 4n \cdot D_{n-1} + (2n-1)^2 \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2m+1} \right) \cdot (2n+1)!!.$$

4.01.03.

$$a_n = 2n-1, \quad b = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & 2n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 3n-4 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 3n-7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \ D_1 = 2, \ D_2 = 7, \ D_3 = 36,$$

$$D_n = (3n-1) \cdot D_{n-1} + (2n-1) \cdot (n-1) \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(2m-1)!!}{m!} \right) \cdot n!.$$

4.01.04.

$$a_n = 2n+1,\quad b = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n+1 & 2n+1 & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 3n-2 & 2n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 3n-5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 23$, $D_3 = 174$,

$D_n = (3n+1)\cdot D_{n-1} + (2n+1)\cdot(n-1)\cdot D_{n-2}$. $D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(2m+1)!!}{m!}\right)\cdot n!$.

4.01.05.

$$a_n = n-1,\quad b = 2n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-3 & 3n-5 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-5 & 3n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 15$,

$D_n = (3n-2)\cdot D_{n-1} + (2n-3)\cdot(n-1)\cdot D_{n-2}$. $D_n = (2n-1)!!$.

4.01.06.

$$a_n = n-1,\quad b = n+2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ n+1 & 2n-1 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3$, $D_2 = 12$, $D_3 = 60$, $D_n = (2n+1)\cdot D_{n-1} + \left(n^2-1\right)\cdot D_{n-2}$.

$D_n = \frac{(n+2)!}{2}$.

Приклад 4.02.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b & a_3 & 0 \\ b & a_2 + b & a_2 \\ 0 & b & a_1 + b \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1 = a_1 + b$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b & a_2 \\ b & a_1 + b \end{vmatrix} = a_1 a_2 + a_1 b + b^2 = b^2 \left(1 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_1 a_2}{b^2} \right)$.

*3.

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b & a_3 & 0 \\ b & a_2 + b & a_2 \\ 0 & b & a_1 + b \end{vmatrix} = (a_3 + b) \cdot D_2 - a_3 b \cdot D_1 = b^3 \left(1 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_1 a_2}{b^2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{b^3} \right).$$

Загальний випадок.

*n. .

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n + b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b \end{vmatrix} = (a_n + b) \cdot D_{n-1} - a_n b \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = (a_n + b) \cdot D_{n-1} - a_n b \cdot D_{n-2},$$

$$D_n - b \cdot D_{n-1} = a_n \cdot (D_{n-1} - b \cdot D_{n-2}).$$

Припустивши, що $U_n = D_n - b \cdot D_{n-1}$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення $U_n = a_n \cdot U_{n-1}$. Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} U_n = a_n \cdot U_{n-1}; \\ U_2 = D_2 - b \cdot D_1 = a_1 a_2 + a_1 b + b^2 - b \cdot \left(a_1 + b\right) = a_1 a_2. \end{cases}$$

Звідси,

$$U_n = \prod_{m=1}^{n} a_m \quad \Rightarrow \quad D_n - b \cdot D_{n-1} = \prod_{m=1}^{n} a_m \quad \Rightarrow \quad D_n = b \cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} a_m.$$

Припустимо, що $D_n = b^n \cdot Z_n$, тоді $Z_1 = \frac{D_1}{b} = 1 + \frac{a_1}{b}$.

Далі,

$$b^n \cdot Z_n = b^n \cdot Z_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} a_m ,$$

$$Z_n = Z_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} \frac{a_m}{b} .$$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} Z_n = Z_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} \dfrac{a_m}{b}; \\ Z_1 = 1 + \dfrac{a_1}{b}. \end{cases}$$

$$Z_2 = Z_1 + \frac{1}{b^2} \prod_{m=1}^{2} a_m = 1 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_1 a_2}{b^2},$$

$$Z_3 = Z_2 + \frac{1}{b^3} \prod_{m=1}^{3} a_m = 1 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_1 a_2}{b^2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{b^3} = 1 + \sum_{k=1}^{3} \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} a_m}{b^k},$$

…………………………………………………,

$$Z_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} a_m}{b^k}.$$

Остаточно маємо $D_n = b^n \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} a_m}{b^k} \right).$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.02.01.

$$a_n = n-1, \quad b_n = 1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & n-1 & n-2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & n-2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 1$, $D_n = nD_{n-1} - (n-1)D_{n-2}$. $D_n = 1$.

4.02.02.

$$a_n = n^2, \quad b = 1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2+1 & n & \cdots & 0 \\ n & (n-1)^2+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $D_1 = 2$, $D_2 = 6$, $D_3 = 42$, $D_n = (n^2+1)D_{n-1} - n^2 D_{n-2}$. $D_n = \sum_{m=0}^{n} (m!)^2$.

4.02.03.

$$a_n = 2n, \quad b = 1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2n-1 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix}7&3&0\\2&5&2\\0&2&3\end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=11$, $D_3=59$, $D_n=(2n+1)D_{n-1}-2nD_{n-2}$. $D_n=\sum_{m=0}^{n}2^m m!$.
4.02.04. $$a_n=\frac{1}{n},\quad b=1,$$ $$D_n=\begin{vmatrix}\frac{n+1}{n}&\frac{1}{n}&0&\cdots&0\\1&\frac{n}{n-1}&\frac{1}{n-1}&\cdots&0\\0&1&\frac{n-1}{n-2}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&0\\1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&2\end{vmatrix}$, $D_1=2$, $D_2=\frac{5}{2}$, $D_3=\frac{8}{3}$, $D_n=\frac{n+1}{n}D_{n-1}-\frac{1}{n}D_{n-2}$. $D_n=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}$.
4.02.05. $$a_n=2^n,\quad b=1,$$ $$D_n=\begin{vmatrix}2^n+1&2^n&0&\cdots&0\\1&2^{n-1}+1&2^{n-1}&\cdots&0\\0&1&2^{n-2}+1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&3\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}9&8&0\\1&5&4\\0&1&3\end{vmatrix}$, $D_1=3$, $D_2=11$, $D_3=75$, $D_n=(2^n+1)D_{n-1}-2^nD_{n-2}$. $D_n=\sum_{m=0}^{n}2^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

4.02.06.

$$a_n = n, \quad b = -1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n-1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & n-2 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & n-3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = 2$, $D_3 = 4$, $D_n = (n-1)D_{n-1} + nD_{n-2}$.

$D_n = (-1)^n . \sum_{m=0}^{n} (-1)^m m!.$

4.02.07.

$$a_n = n^2, \quad b = -1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2-1 & n & \cdots & 0 \\ -n & (n-1)^2-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, $D_1 = 0$, $D_2 = 4$, $D_3 = 32$, $D_n = (n^2-1)D_{n-1} + n^2 D_{n-2}$.

$D_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m (m!)^2$.

4.02.08.

$$a_n = 2n, \quad b = -1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 2n-3 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 2n-5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 7$, $D_3 = 41$, $D_n = (2n-1)D_{n-1} + 2nD_{n-2}$.

$D_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m 2^m m!.$

4.02.09.

$$a_n = 2^n, \quad b = -1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2^n - 1 & 2^n & \cdots & 0 \\ -1 & 2^{n-1} - 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 7$, $D_3 = 57$, $D_n = (2^n - 1)D_{n-1} + 2^n D_{n-2}$.

$$D_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m 2^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Приклад 4.03.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a + b_n & a & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a + b_{n-1} & a & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a + b_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a + b_3 & a & 0 \\ b_2 & a + b_2 & a \\ 0 & b_1 & a + b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a + b_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a + b_2 & a \\ b_1 & a + b_1 \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdot \left(1 + \frac{a}{b_1} + \frac{a^2}{b_1 b_2}\right).$

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a + b_3 & a & 0 \\ b_2 & a + b_2 & a \\ 0 & b_1 & a + b_1 \end{vmatrix} = \left(a + b_3\right) \cdot D_2 - ab_2 \cdot D_1 =$

$$= b_3 b_2 b_1 \left(1 + \frac{a}{b_1} + \frac{a^2}{b_1 b_2} + \frac{a^3}{b_1 b_2 b_3}\right).$$

Загальний випадок.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} a+b_n & a & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a+b_{n-1} & a & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b_1 \end{vmatrix} = \left(a+b_n\right)\cdot D_{n-1} - ab_{n-1}\cdot D_{n-2}.$$

Звідси,

$$D_n = \left(a+b_n\right)\cdot D_{n-1} - ab_{n-1}\cdot D_{n-2},$$

$$D_n - b_n\cdot D_{n-1} = a\cdot\left(D_{n-1} - b_{n-1}\cdot D_{n-2}\right).$$

Припустимо, що $U_n = D_n - b_n\cdot D_{n-1}$, тоді $U_n = a\cdot U_{n-1}$ і $U_2 = D_2 - b_2 \cdot D_1 = a^2 + ab_2 + b_1 b_2 - b_2\cdot\left(a+b_1\right) = a^2$. Таким чином,

$U_n = a^n \quad \Rightarrow \quad D_n - b_n\cdot D_{n-1} = a^n \quad \Rightarrow \quad D_n = b_n\cdot D_{n-1} + a^n.$

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} D_n = b_n\cdot D_{n-1} + a^n; \\ D_1 = a_1 + b_1. \end{cases}$$

$$D_2 = b_2 D_1 + a^2 = b_1 b_2\cdot\left(1 + \frac{a}{b_1} + \frac{a^2}{b_1 b_2}\right),$$

$$D_3 = b_3 D_2 + a^3 = b_3 b_2 b_1\left(1 + \frac{a}{b_1} + \frac{a^2}{b_1 b_2} + \frac{a^3}{b_1 b_2 b_3}\right),$$

…………………………………………………,

$$D_n = \prod_{m=1}^{n} b_m\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{\prod\limits_{m=1}^{k} b_m}\right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.03.01.

$$a=1, \quad b_n=n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & n-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1=2, \\ D_2=5, \\ D_3=16. \end{matrix}$

$D_n=(n+1)\cdot D_{n-1}+(n-1)\cdot D_{n-2}$. $D_n=\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\right)\cdot n!$.

4.03.02.

$$a=1, \quad b_n=2n-1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-3 & 2n-2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-5 & 2n-4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1=2, \\ D_2=7, \\ D_3=36. \end{matrix}$ $\quad D_n=2n\cdot D_{n-1}+(2n-3)\cdot D_{n-2}$.

$D_n=\left(1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(2m-1)!!}\right)\cdot(2n-1)!!$.

4.03.03.

$$a=1, \quad b_n=(-1)^n,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+(-1)^n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (-1)^{n-1} & 1+(-1)^{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & (-1)^{n-2} & 1+(-1)^{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 0, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 0. \end{matrix}$ $D_{2n+1} = -D_{2n-1}$, $D_{2n+1} = 0$. $D_{2n} = 2 \cdot D_{2n-1} + D_{2n-2}$, $D_{2n} = D_{2n-2}$, $D_{2n} = 1$.

Приклад 4.04.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_{n-1} + b_{n-2} & b_{n-1} + b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + a_2 & a_2 + a_1 \\ b_3 + b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1 + b_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_2 - b_1 & a_2 - b_1 \\ b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$

$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 0 & a_2 - b_1 \\ b_2 - a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = -\left(a_2 - b_1\right) \cdot \left(b_2 - a_1\right).$

*3. $D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + a_2 & a_2 + a_1 \\ b_3 + b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_3 - b_2 & a_3 - b_2 & 0 \\ b_3 + b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$

$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 0 & a_3 - b_2 & 0 \\ b_3 - a_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ 0 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} = -\left(a_3 - b_2\right) \cdot \left(b_3 - a_2\right) \cdot \left(a_1 + b_1\right).$

Загальний випадок.

$$*n.\quad D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ b_n+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ b_{n-1}+b_{n-2} & b_{n-1}+b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+b_1 & b_2+b_1 & b_2+b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I-II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n-b_{n-1} & aa_n-b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ b_{n-1}+b_{n-2} & b_{n-1}+b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+b_1 & b_2+b_1 & b_2+b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-II \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_n-b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n-a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 0 & b_{n-1}+b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_2+b_1 & b_2+b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = -\left(a_n-b_{n-1}\right)\cdot\left(b_n-a_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}.$$

Отже, $D_n = -\left(a_n-b_{n-1}\right)\cdot\left(b_n-a_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}$.

Остаточно маємо

$$D_{2k+1} = (-1)^k\cdot\left(a_1+b_1\right)\cdot\prod_{m=1}^{k}\left(a_{2m+1}-b_{2m}\right)\cdot\left(b_{2m+1}-a_{2m}\right),$$

$$D_{2k} = (-1)^k\cdot\prod_{m=1}^{k}\left(a_{2m}-b_{2m-1}\right)\cdot\left(b_{2m}-a_{2m-1}\right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.04.01.

$$a_n = n+\frac{1}{2},\quad b_n = \frac{1}{2},\qquad D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 2n & 2n-2 & \cdots & 4 \\ 1 & n & 2n-2 & \cdots & 4 \\ 1 & 1 & n-1 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix}4&6&4\\1&3&4\\1&1&2\end{vmatrix}$, $\begin{matrix}D_1=2,\\D_2=2,\\D_3=12.\end{matrix}$ $D_n=n(n-1)\cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1}=(2n)!!\cdot(2n+1)!!\cdot 2$. $D_{2n}=(2n)!!\cdot(2n-1)!!$.
4.04.02. $$a_n=\frac{6n+1}{4},\quad b_n=-\frac{n+1}{4},\quad D_n=\begin{vmatrix}n&3n-1&3n-4&\cdots&5\\-n&n-1&3n-4&\cdots&5\\1-n&1-n&n-2&\cdots&5\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-2&-2&-2&\cdots&1\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}3&8&5\\-3&2&5\\-2&-2&1\end{vmatrix}$, $\begin{matrix}D_1=1,\\D_2=12,\\D_3=30\end{matrix}$ $D_n=2n\cdot(2n-1)\cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1}=2^n\cdot(2n+1)!!\cdot\prod_{m=1}^{n}(4m+1)$. $D_{2n}=4^n\cdot n!\cdot\prod_{m=1}^{n}(4m-1)$.
4.04.03. $$a_n=\frac{6n-3}{4},\quad b_n=\frac{2n-1}{4},\quad D_n=\begin{vmatrix}2n-1&3n-3&3n-6&\cdots&3\\n-1&2n-3&3n-6&\cdots&3\\n-2&n-2&2n-5&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}5&6&3\\2&3&3\\1&1&1\end{vmatrix}$, $\begin{matrix}D_1=1,\\D_2=0,\\D_3=3\end{matrix}$ $D_n=n\cdot(n-2)\cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1}=(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!$. $D_{2n}=0$.
4.04.04. $$a_n=\frac{6n+3}{4},\quad b_n=\frac{10n+5}{4},\quad D_n=\begin{vmatrix}4n+2&3n&3n-3&\cdots&6\\5n&4n-2&3n-3&\cdots&6\\5n-5&5n-5&4n-6&\cdots&6\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\10&10&10&\cdots&6\end{vmatrix}.$$ # $D_3=\begin{vmatrix}14&9&6\\15&10&6\\10&10&6\end{vmatrix}$, $\begin{matrix}D_1=6,\\D_2=0,\\D_3=30\end{matrix}$ $D_n=(n-2)\cdot(n+2)\cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1}=(2n-1)!!\cdot(2n+3)!!\cdot 2$. $D_{2n}=0$.

4.04.05.

$$a_n = 2n-1, \quad b_n = n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & 4n-4 & 4n-8 & \cdots & 4 \\ 2n-3 & 3n-5 & 4n-8 & \cdots & 4 \\ 2n-5 & 2n-5 & 3n-8 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = 4 \end{matrix}$ $D_n = (n-2)\cdot(n+1)\cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (2n-1)!!\cdot 2^n \cdot (n+1)!$. $D_{2n} = 0$.

4.4.06.

$$a_n = 3n, \quad b_n = n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4n-1 & 6n-3 & 6n-9 & \cdots & 9 \\ 2n-3 & 4n-5 & 6n-9 & \cdots & 9 \\ 2n-5 & 2n-5 & 4n-9 & \cdots & 9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 15 & 9 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 12, \\ D_3 = 96 \end{matrix}$ $D_n = 4\cdot(n-1)\cdot(n+1)\cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = 4^{2n}\cdot n!\cdot(n+1)!\cdot 3$. $D_{2n} = 4^n \cdot (2n-1)!!\cdot(2n+1)!!$.

4.4.07.

$$a_n = 3n - \frac{3}{2}, \quad b_n = 2n - \frac{5}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 5n-4 & 6n-6 & 6n-12 & \cdots & 6 \\ 4n-7 & 5n-9 & 6n-12 & \cdots & 6 \\ 4n-11 & 4n-11 & 5n-14 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = 6 \end{matrix}$ $D_n = (n-2)\cdot(n+3)\cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = 2^n \cdot (2n-1)!!\cdot(n+2)!!, \quad (n>0)$. $D_{2n} = 0$.

4.4.08.

$$a_n = n + \frac{x+1}{2}, \quad b_n = -n + \frac{x-1}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & x+2n & \cdots & x+4 \\ x-2n & x & \cdots & x+4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-4 & x-4 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} x & x+6 & x+4 \\ x-6 & x & x+4 \\ x-4 & x-4 & x \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = x, \\ D_2 = 16, \\ D_3 = 36 \cdot x \end{matrix}$ $\quad D_n = 4 \cdot n^2 \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = 4^n \cdot \left((2n+1)!!\right)^2 \cdot x$. $D_{2n} = 4^{2n} \cdot (n!)^2$.

Приклад 4.05.

Показати, що визначник

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_n + a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_{n-1} + a_{n-2} & b_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_3 + a_2 & a_2 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку $D_n = -\left(a_n - a_{n-1}\right) \cdot \left(b_n - b_{n-1}\right) \cdot D_{n-2}$. Отримати його значення.

Розв'язання.

Випадок , коли $\left(a_n - a_{n-1}\right) \cdot \left(b_n - b_{n-1}\right) = const$ ми розглянули раніш (приклад_). В загальному випадку рекурентне співвідношення будується аналогічно.

Розглянемо випадок, коли $\left(a_n - a_{n-1}\right) \cdot \left(b_n - b_{n-1}\right) \neq const$. Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

$D_1 = a_1 + b_1$.

$$D_2=\begin{vmatrix} a_2+b_2 & a_2+b_1 \\ b_2+a_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\left|I-II\to I\right|=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ b_2+a_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ II-I\to II\end{matrix}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & 0 \\ b_2+a_1 & b_1-b_2 \end{vmatrix}=-\left(a_2-a_1\right)\left(b_2-b_1\right).$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ b_n+a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ b_{n-1}+a_{n-2} & b_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+a_1 & b_2+a_1 & b_2+a_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\left|I-II\to I\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} a_n-a_{n-1} & a_n-a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n+a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ b_{n-1}+a_{n-2} & b_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2+a_1 & b_2+a_1 & b_2+a_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-II\to I\end{matrix}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & a_n-a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n-b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ 0 & b_{n-1}+a_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_2+a_1 & b_2+a_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=-\left(a_n-a_{n-1}\right)\cdot\left(b_n-b_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}\,.$$

$$D_n=-\left(a_n-a_{n-1}\right)\cdot\left(b_n-b_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}\,.$$

$n=2k$

$$D_4=-\left(a_4-a_3\right)\left(b_4-b_3\right)\cdot D_2=\left(a_4-a_3\right)\left(a_2-a_1\right)\left(b_4-b_3\right)\left(b_2-b_1\right),$$
$$D_6=-\left(a_6-a_5\right)\left(b_6-b_5\right)\cdot D_4=-\left(a_6-a_5\right)\left(b_6-b_5\right)\left(a_4-a_3\right)\left(a_2-a_1\right)\left(b_4-b_3\right)\left(b_2-b_1\right)=$$
$$=(-1)^3\prod_{m=1}^{3}\left(a_{2m}-a_{2m-1}\right)\left(b_{2m}-b_{2m-1}\right),$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

$$D_{2k}==(-1)^k\prod_{m=1}^{k}\left(a_{2m}-a_{2m-1}\right)\left(b_{2m}-b_{2m-1}\right).$$

$n = 2k+1$

$$D_3 = -(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)\cdot D_1 = -(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)(a_1 + b_1),$$
$$D_5 = -(a_5 - a_4)(b_5 - b_4)\cdot D_3 = (a_5 - a_4)(b_5 - b_4)(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)(a_1 + b_1) =$$
$$= (-1)^2 (a_1 + b_1)\prod_{m=1}^{2}(a_{2m+1} - a_{2m})(b_{2m+1} - b_{2m}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$D_{2k+1} = (-1)^k (a_1 + b_1)\prod_{m=1}^{k}(a_{2m+1} - a_{2m})(b_{2m+1} - b_{2m}).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.05.01.

$$a_n = n(n+1),\ \ b_n = n+1\ ,\quad D_n = \begin{vmatrix} (n+1)^2 & (n+1)^2 - 1 & n^2 - 1 & \cdots & 8 \\ n^2 + 1 & n^2 & n^2 - 1 & \cdots & 8 \\ n^2 - 2n + 2 & n^2 - 2n + 2 & (n-1)^2 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 16 & 15 & 8 \\ 10 & 9 & 8 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 4, \\ D_2 = -4, \\ D_3 = -24. \end{matrix}$ $\quad c_n = 2n,\ d_n = 1,\ D_n = -2n\cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 2^{n+2}\cdot(2n+1)!!.\ \ D_{2n} = (-1)^n\cdot 4^n\cdot n!.$

4.05.02.

$$a_n = n^2,\quad b_n = 2n+1,\quad D_n = \begin{vmatrix} (n+1)^2 & (n+1)^2 - 2 & n^2 - 2 & \cdots & 7 \\ n^2 + 2 & n^2 & n^2 - 2 & \cdots & 7 \\ n^2 - 2n + 3 & n^2 - 2n + 3 & (n-1)^2 & \cdots & 7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & 6 & 6 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 16 & 14 & 7 \\ 11 & 9 & 7 \\ 6 & 6 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 4, \\ D_2 = -6, \\ D_3 = -40. \end{matrix}$ $\quad D_n = -2\cdot(2n-1)\cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = (-1)^n\cdot 2^{n+2}\cdot\prod_{m=1}^{n}(4m+1).\ \ D_{2n} = (-1)^n\cdot 2^n\cdot\prod_{m=1}^{n}(4m-1).$

4.05.03.

$$a_n = (n+1)^2, \quad b_n = -2n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2+2 & n^2+4 & (n-1)^2+4 & \cdots & 8 \\ (n-1)^2 & (n-1)^2+2 & (n-1)^2+4 & \cdots & 8 \\ (n-2)^2 & (n-2)^2 & (n-2)^2+2 & \cdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1 = 3, \\ D_2 = 10, \\ D_3 = 42. \end{array}$

$c_n = 2n+1$, $d_n = -2$,

$D_n = 2 \cdot (2n+1) \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = 2^n \cdot \prod\limits_{m=0}^{n} (4m+3)$. $D_{2n} = 2^n \cdot \prod\limits_{m=1}^{n} (4m+1)$.

4.05.04.

$$a_n = \frac{n^2-n}{2}, \quad b_n = 3-n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n^2-3n}{2}+3 & \frac{n^2-3n}{2}+4 & \frac{n^2-5n}{2}+6 & \cdots & 3 \\ \frac{n^2-5n}{2}+4 & \frac{n^2-5n}{2}+5 & \frac{n^2-5n}{2}+6 & \cdots & 3 \\ \frac{n^2-7n}{2}+7 & \frac{n^2-7n}{2}+7 & \frac{n^2-7n}{2}+8 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{array}{l} D_1 = 2, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 4. \end{array}$

$c_n = n-1$, $d_n = -1$,

$D_n = (n-1) \cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = 2^n \cdot n!$. $D_{2n} = (2n-1)!!$

4.05.05.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2},\ \ b_n = \frac{n(n+1)}{2}, D_n = \begin{vmatrix} n\cdot(n+1) & n^2 & (n-1)^2 & \cdots & 4 \\ n^2 & n\cdot(n-1) & (n-1)^2 & \cdots & 4 \\ (n-1)^2 & (n-1)^2 & (n-1)\cdot(n-2) & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = -4, \\ D_3 = -18. \end{matrix}$

$c_n = n$, $d_n = n$, $D_n = -n^2 \cdot D_{n-2}$. $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 2 \cdot \left((2n+1)!!\right)^2$.

$D_{2n} = (-1)^n \cdot 4^n \cdot (n!)^2$.

4.05.06.

$$a_n = \frac{3n^2 - n}{2},\ \ b_n = \frac{3n - n^2}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2 + n & (n+1)^2 - 3 & n^2 - 3 & \cdots & 6 \\ (n-1)^2 + 1 & n^2 - n & n^2 - 3 & \cdots & 6 \\ (n-2)^2 + 1 & (n-2)^2 + 1 & n^2 - 3n + 2 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 13 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 0, \\ D_3 = 14. \end{matrix}$

$c_n = 3n - 2$, $d_n = 2 - n$, $D_n = (3n-2)\cdot(n-2)\cdot D_{n-2}$.

$D_{2n+1} = 2 \cdot \prod_{m=1}^{n} \left\{(6m+1)\cdot(2m-1)\right\}$. $D_{2n} = 0$.

4.05.07.

$$a_n = \frac{n^2 - n}{2},\ \ b_n = \frac{3n - n^2}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & 2n-2 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ 1 & n-1 & 2n-4 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & n-2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1,\ D_2 = 0,\ D_3 = 2.$ $c_n = n-1,\ d_n = 2-n,\ D_n = n\cdot(n-2)\cdot D_{n-2}.$ $D_{2n+1} = 2^n \cdot n! \cdot \prod_{m=1}^{n}(2m-1).\ \ D_{2n} = 0.$
4.05.08. $$a_n = n^3 - n,\ b_n = n,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} n^3 & n^3-1 & (n-1)^3-1 & \cdots & 7 \\ (n-1)^3+1 & (n-1)^3 & (n-1)^3-1 & \cdots & 7 \\ (n-2)^3+1 & (n-1)^3+1 & (n-2)^3 & \cdots & 7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 27 & 26 & 7 \\ 9 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $D_1 = 1,\ D_2 = -6,\ D_3 = -18.$ $c_n = 3n\cdot(n-1),\ d_n = 1,\ D_n = -3n\cdot(n-1)\cdot D_{n-2}.$ $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 6^n \cdot (2n+1)!!\cdot n!.\ \ D_{2n} = (-1)^n \cdot 6^n \cdot (2n-1)!!\cdot n!.$
4.05.09. $$a_n = n^3 + 3n^2 + 2n,\ b_n = n,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} (n+1)^3-1 & (n+1)^3-2 & n^3-2 & \cdots & 25 \\ n^3 & n^3-1 & n^3-2 & \cdots & 25 \\ (n-1)^3 & (n-1)^3 & (n-1)^3-1 & \cdots & 25 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 8 & 8 & 8 & \cdots & 7 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 63 & 62 & 25 \\ 27 & 26 & 25 \\ 8 & 8 & 7 \end{vmatrix}$, $D_1 = 7,\ D_2 = -18,\ D_3 = -252.$ $c_n = 3n\cdot(n+1),\ d_n = 1,\ D_n = -3n\cdot(n+1)\cdot D_{n-2}.$ $D_{2n+1} = (-1)^n \cdot 7 \cdot 6^n \cdot (2n+1)!!\cdot (n+1)!.$ $D_{2n} = (-1)^n \cdot 6^n \cdot (2n+1)!!\cdot n!$

Приклад 4.06.

Показати, що визначник $D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 2b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 2b_{n-2} & 2b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_3 & 0 \\ 2b_2 & a_2+b_2 & a_2 \\ 2b_1 & 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix}$ задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку $D_n = b_n \cdot D_{n-1} - a_n \cdot \left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) \cdot D_{n-2}$. Отримати його значення.

Розв'язання.

Припустимо, що $a_k \neq b_k$, $\left(k = 1, 2, \cdots, n\right)$. Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = a_1 + b_1$.

*2. $D_2 = \begin{vmatrix} a_2+b_2 & a_2 \\ 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| =$

$= \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_1 - a_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = b_2 \cdot \left(a_1 + b_1\right) - a_2 \cdot \left(b_1 - a_1\right).$

*3.

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_3 & 0 \\ 2b_2 & a_2+b_2 & a_2 \\ 2b_1 & 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні} \\ \text{перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} b_3 & a_3 & 0 \\ b_2 - a_2 & a_2+b_2 & a_2 \\ 0 & 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= b_3 \cdot D_2 - a_3 \cdot \left(b_2 - a_2\right) \cdot D_1.$$

Загальний випадок.

*n.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 2b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 2b_{n-2} & 2b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 2b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = b_n \cdot D_{n-1} - a_n \cdot \left(b_{n-1}-a_{n-1}\right) \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = b_n \cdot D_{n-1} - a_n \cdot \left(b_{n-1}-a_{n-1}\right) \cdot D_{n-2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad D_n - \left(b_n - a_n\right) \cdot D_{n-1} = a_n \cdot \left(D_{n-1} - \left(b_{n-1}-a_{n-1}\right) \cdot D_{n-2}\right).$$

Припустивши, що $Z_n = D_n - \left(b_n - a_n\right) \cdot D_{n-1}$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення першого порядку відносно варіанти Z_n. Розв'яжемо задачу Коші:

$$\begin{cases} Z_n = a_n \cdot Z_{n-1}; \\ Z_2 = D_2 - \left(b_2 - a_2\right) \cdot D_1 = 2a_2a_1. \end{cases}$$

$Z_3 = a_3Z_2 = 2a_1a_2a_3$,

……………………,

$$Z_n = 2 \cdot \prod_{m=1}^{n} a_m.$$

Звідси,

$$D_n - \left(b_n - a_n\right) \cdot D_{n-1} = 2 \cdot \prod_{m=1}^{n} a_m ,$$

$$D_n = \left(b_n - a_n\right) \cdot D_{n-1} + 2 \cdot \prod_{m=1}^{n} a_m .$$

Припустимо, що $D_n = U_n \cdot \prod_{m=1}^{n} \left(b_m - a_m\right)$, тоді

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + 2\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}\dfrac{a_m}{b_m - a_m}; \\ U_1 = \dfrac{b_1 + a_1}{b_1 - a_1} = 1 + \dfrac{2a_1}{b_1 - a_1}. \end{cases}$$

$$U_2 = U_1 + 2\cdot\frac{\prod\limits_{m=1}^{2} a_m}{\prod\limits_{m=1}^{2}(b_m - a_m)} = 1 + 2\frac{a_1}{b_1 - a_1} + 2\frac{a_1a_2}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)},$$

………………………………………………………………,

$$U_n = U_1 + 2\cdot\sum_{j=2}^{n}\prod_{m=1}^{j}\frac{a_m}{b_m - a_m}.$$

Остаточно маємо $D_n = \left(1 + 2\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{m=1}^{j}\dfrac{a_m}{b_m - a_m}\right)\cdot\prod\limits_{m=1}^{n}(b_m - a_m)$.

Якщо $a_1 = 0$, то $D_n = \prod\limits_{m=1}^{n}(b_m - a_m)$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.06.01.

$$a_n = 1, \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-2 & n & 1 & \cdots & 0 \\ 2n-4 & 2n-4 & n-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 4, \\ D_3 = 10. \end{matrix}$

$D_n = n\cdot D_{n-1} - (n-2)\cdot D_{n-2}$.

$D_n = \left(2 + 2\cdot\sum\limits_{m=2}^{n}\dfrac{1}{(m-1)!}\right)\cdot\prod\limits_{m=2}^{n}(m-1)$.

4.06.02.

$$a_n = n-1, \quad b_n = n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2n-2 & 2n-3 & n-2 & \cdots & 0 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 1. \end{matrix} \qquad D_n = n \cdot D_{n-1} - (n-1) \cdot D_{n-2}.$$

$D_n = 1$.

4.06.03.

$$a_n = 2^{n-1}, \quad b_n = 2^n,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3\cdot 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 2^n & 3\cdot 2^{n-2} & 2^{n-2} & \cdots & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 3\cdot 2^{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 10, \\ D_3 = 56. \end{matrix} \qquad D_n = 2^n \cdot D_{n-1} - 2^{2n-3} \cdot D_{n-2}.$$

$D_n = (1 + 2 \cdot n) \cdot 2^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$.

4.06.04.

$$a_n = n-1, \quad b_n = 2n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-2 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 4n-6 & 3n-5 & n-2 & \cdots & 0 \\ 4n-10 & 4n-10 & 3n-8 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 6. \end{matrix}$$

$D_n = (2n-1) \cdot D_{n-1} - (n-1)^2 \cdot D_{n-2}$.

$D_n = n!$.

4.06.05. $$a_n = n, \quad b_n = 3n-1,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 4n-1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 6n-8 & 4n-5 & n-1 & \cdots & 0 \\ 6n-14 & 6n-14 & 4n-9 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 10 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $D_1 = 3,\ D_2 = 13,\ D_3 = 77.$ $D_n = (3n-1)\cdot D_{n-1} - n\cdot(2n-3)\cdot D_{n-2}$. $D_n = \left(1 + 2\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{m!}{(2m-1)!!}\right)\cdot(2n-1)!!.$
4.6.06. $$a_n = n+1, \quad b_n = 3n,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 4n+1 & n+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 6n-6 & 4n-3 & n & \cdots & 0 \\ 6n-12 & 6n-12 & 4n-7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & 6 & 6 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 13 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$, $D_1 = 5,\ D_2 = 27,\ D_3 = 183.$ $D_n = 3n\cdot D_{n-1} - (n+1)\cdot(2n-3)\cdot D_{n-2}$. $D_n = \left(1 + 2\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{(m+1)!}{(2m-1)!!}\right)\cdot(2n-1)!!.$

Приклад 4.07.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a-b_{n-1} & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ a-c & a & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ a-c & a-c & a & \cdots & a-b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-c & a-c & a-c & \cdots & a \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & a-b_2 & a-b_1 \\ a-c & a & a-b_1 \\ a-c & a-c & a \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1 = a$.

*2.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & a-b_1 \\ a-c & a \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} c & -b_1 \\ a-c & a \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} b_1+c & -b_1 \\ -c & a \end{vmatrix} = a\cdot\left(b_1+c\right) - c\cdot b_1 .$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} a & a-b_2 & a-b_1 \\ a-c & a & a-b_1 \\ a-c & a-c & a \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} c & -b_2 & 0 \\ a-c & a & a-b_1 \\ a-c & a-c & a \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} b_2+c & -b_2 & 0 \\ -c & a & a-b_1 \\ 0 & a-c & a \end{vmatrix} = \left(b_2+c\right)\cdot D_2 - b_2\cdot c\cdot D_1 .$$

Загальний випадок.

*n.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a-b_{n-1} & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ a-c & a & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ a-c & a-c & a & \cdots & a-b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-c & a-c & a-c & \cdots & a \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} c & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a-c & a & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ a-c & a-c & a & \cdots & a-b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-c & a-c & a-c & \cdots & a \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} c+b_{n-1} & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -c & a & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ 0 & a-c & a & \cdots & a-b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a-c & a-c & \cdots & a \end{vmatrix} =$$

$$= \left(b_{n-1}+c\right)\cdot D_{n-1} - b_{n-1}\cdot c\cdot D_{n-2} .$$

$$D_n = \left(b_{n-1}+c\right)\cdot D_{n-1} - b_{n-1}\cdot c\cdot D_{n-2} \quad \Rightarrow \quad D_n - c\cdot D_{n-1} = b_{n-1}\cdot\left(D_{n-1} - c\cdot D_{n-2}\right).$$

Припустивши, що $Z_n = D_n - c \cdot D_{n-1}$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення першого порядку відносно варіанти Z_n. Отримаємо задачу Коші:

$$\begin{cases} Z_n = b_{n-1} \cdot Z_{n-1}; \\ Z_2 = D_2 - c \cdot D_1 = \left(b_1 + c\right) \cdot a - c \cdot b_1 - c \cdot a = b_1 \cdot \left(a - c\right). \end{cases}$$

$Z_3 = b_2 \cdot Z_2 = b_2 b_1 \left(a - c\right),$

…………………………,

$$Z_n = \left(a - c\right) \cdot \prod_{m=1}^{n-1} b_m .$$

Звідси, $D_n = c \cdot D_{n-1} + \left(a - c\right) \cdot \prod_{m=1}^{n-1} b_m$.

Припустимо,що $D_n = U_n \cdot c^{n-1}$, тоді $U_1 = D_1 = a$. Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} + \dfrac{a - c}{c^{n-1}} \cdot \prod_{m=1}^{n-1} b_m ; \\ U_1 = a. \end{cases}$$

$$U_2 = U_1 + \frac{a - c}{c} \prod_{m=1}^{1} b_m = a + \frac{a - c}{c} \cdot b_1 ,$$

$$U_3 = U_2 + \frac{a - c}{c^2} \prod_{m=1}^{2} b_m = a + \frac{a - c}{c} \cdot b_1 + \frac{a - c}{c^2} \cdot b_1 b_2 ,$$

……………………………………………………,

$$U_n = a + \left(a - c\right) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{m=1}^{j} \frac{b_m}{c^m} .$$

Таким чином, $D_n = \left(a + \left(a - c\right) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{m=1}^{j} \frac{b_m}{c^m} \right) \cdot c^{n-1}$.

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.07.01.

$$a=2,\quad b_n=n,\quad c=1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 3-n & 4-n & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4-n & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix},\quad \begin{matrix} D_1=2, \\ D_2=3, \\ D_3=5. \end{matrix}\qquad D_n=n\cdot D_{n-1}-(n-1)\cdot D_{n-2}.\ D_n=\dfrac{n^2-n+4}{2}.$

4.07.02.

$$a=3,\quad b_n=2n-1,\quad c=1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 6-2n & 8-2n & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 8-2n & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix},\quad \begin{matrix} D_1=3, \\ D_2=5, \\ D_3=11. \end{matrix}\quad D_n=2\cdot(n-1)\cdot D_{n-1}-(2n-3)\cdot D_{n-2},$

$D_n=2\cdot(n-1)^2+3.$

4.07.03.

$$a=2,\quad b_n=4n-3,\quad c=1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 9-4n & 13-4n & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 13-4n & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix},\quad \begin{matrix} D_1=2, \\ D_2=3, \\ D_3=8. \end{matrix}\quad D_n=2\cdot(2n-3)\cdot D_{n-1}-(4n-7)\cdot D_{n-2}.$

$D_n=2n^2-5n+5.$

4.07.04.

$$a=3,\quad b_n=3n-2,\quad c=1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 8-3n & 11-3n & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 11-3n & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1=3, \\ D_2=5, \\ D_3=13. \end{matrix}$ $D_n=(3n-4)\cdot D_{n-1}-(3n-5)\cdot D_{n-2}$. $D_n=3n^2-7n+7$.

4.07.05.

$$a=2,\quad b_n=n^2,\quad c=1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 2n+1-n^2 & 4n-2-n^2 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4n-2-n^2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1=2, \\ D_2=3, \\ D_3=7. \end{matrix}$

$D_n=(n^2-2n+2)\cdot D_{n-1}-(n^2-2n+1)\cdot D_{n-2}$. $D_n=\dfrac{2n^3-3n^2+n+12}{6}$.

4.07.06 .

$$a=3,\quad b_n=2n^2-1,\quad c=1,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 4n+2-2n^2 & 8n-4-2n^2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 8n-4-2n^2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1=3, \\ D_2=5, \\ D_3=19. \end{matrix}$

$D_n=2\cdot(n-1)\cdot D_{n-1}-(2n-3)\cdot D_{n-2}$. $D_n=\dfrac{4n^3-6n^2-4n+15}{3}$.

Приклад 4.08.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} - a_n & c_{n-2} - a_{n-1} & \cdots & c_1 - a_2 \\ b & c_{n-1} & c_{n-2} - a_{n-1} & \cdots & c_1 - a_2 \\ b & b & c_{n-2} & \cdots & c_1 - a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & c_1 \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} c_3 & c_2 - a_3 & c_1 - a_2 \\ b & c_2 & c_1 - a_2 \\ b & b & c_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Визначимо варіанту b_n: $b_n = c_n - b$.

Розглянемо випадки, коли $n = 1$, $n = 2$ та $n = 3$.

*1. $D_1 = c_1$.

*2.

$$D_2 = \begin{vmatrix} c_2 & c_1 - a_2 \\ b & c_1 \end{vmatrix} = \left| \; I - II \to I \; \right| = \begin{vmatrix} c_2 - b & -a_2 \\ b & c_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & -a_2 \\ -b_1 & c_1 \end{vmatrix} = c_1 \cdot (a_2 + b_2) - a_2 \cdot b_1 .$$

*3. $$D_3 = \begin{vmatrix} c_3 & c_2 - a_3 & c_1 - a_2 \\ b & c_2 & c_1 - a_2 \\ b & b & c_1 \end{vmatrix} = \left| \; I - II \to I \; \right| = \begin{vmatrix} c_3 - b & -a_3 & 0 \\ b & c_2 & c_1 - a_2 \\ b & b & c_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & -a_3 & 0 \\ -b_2 & c_2 & c_1 - a_2 \\ 0 & b & c_1 \end{vmatrix} = (a_3 + b_3) \cdot D_2 - a_3 b_2 \cdot D_1 .$$

Загальний випадок.

*n. $D_n = \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1}-a_n & c_{n-2}-a_{n-1} & \cdots & c_1-a_2 \\ b & c_{n-1} & c_{n-2}-a_{n-1} & \cdots & c_1-a_2 \\ b & b & c_{n-2} & \cdots & c_1-a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \left| I-II \to I \right| =$

$$= \begin{vmatrix} b_n & -a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b & c_{n-1} & c_{n-2}-a_{n-1} & \cdots & c_1-a_2 \\ b & b & c_{n-2} & \cdots & c_1-a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-II \to I \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n+b_n & -a_n & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{n-1} & c_{n-1} & c_{n-2}-a_{n-1} & \cdots & c_1-a_2 \\ 0 & b & c_{n-2} & \cdots & c_1-a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & b & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \left(a_n+b_n\right) \cdot D_{n-1} - a_n b_{n-1} \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(a_n+b_n\right) \cdot D_{n-1} - a_n b_{n-1} \cdot D_{n-2}.$$

Ми отримали лінійне рекурентне співвідношення другого порядку. Нехай U_n і $V_n -$ два лінійно незалежних часткових розв'язків рекурентного співвідношення $D_n = \left(a_n+b_n\right) \cdot D_{n-1} - a_n b_{n-1} \cdot D_{n-2}$, тоді загальній розв'язок буде мати вигляд $D_n = C_u \cdot U_n + C_v \cdot V_n$. Варіанта $V_n = \prod_{m=1}^{n} b_m$ є частковим розв'язком розглядуваного рекурентного співвідношення. Дійсно,

$$D_n - \left(a_n+b_n\right) \cdot D_{n-1} + a_n b_{n-1} \cdot D_{n-2} =$$

$$= V_n - \left(a_n+b_n\right) \cdot V_{n-1} + a_n b_{n-1} \cdot V_{n-2} = \prod_{m=1}^{n} b_m - \left(a_n+b_n\right) \cdot \prod_{m=1}^{n-1} b_m + a_n b_{n-1} \cdot \prod_{m=1}^{n-2} b_m = 0 .$$

Другий лінійно незалежний частковий розв'язок визначається рекурентним співвідношенням $U_n = \frac{V_n}{V_{n-1}} \cdot U_{n-1} + \frac{W_n}{V_{n-1}}$. Як було показано раніше, Вронськіан двох часткових розв'язків $W_n = \frac{1}{b_0} \prod_{m=1}^{n} a_m b_{m-1}$. Таким чином, $U_n = b_n \cdot U_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} a_m$.

Припустивши, що $U_n = Z_n \cdot \prod_{m=1}^{n} b_m$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення відносно Z_n:

$$Z_n = Z_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} \frac{a_m}{b_m}.$$

Звідси,

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \prod_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m} \quad \Rightarrow \quad U_n = \left(\prod_{m=1}^{n} b_m \right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \prod_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m} .$$

Значення визначника можна подати у вигляді

$$D_n = \left(C_v + C_u \cdot \sum_{k=1}^{n} \prod_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m} \right) \cdot \prod_{m=1}^{n} b_m .$$

Враховуючи початкові умови $D_1 = c_1, D_2 = c_1 \cdot (a_2 + b_2) - a_2 \cdot b_1$, знайдемо коефіцієнти лінійної комбінації C_v і C_u :

$$\begin{cases} D_1 = C_v \cdot b_1 + C_u \cdot a_1; \\ D_2 = C_v \cdot b_1 b_2 + C_u \cdot (a_1 b_2 + a_1 a_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_v = \dfrac{D_1 \cdot (a_1 b_2 + a_1 a_2) - D_2 \cdot a_1}{a_1 b_1 a_2}; \\ C_u = \dfrac{D_2 \cdot b_1 - D_1 \cdot b_1 b_2}{a_1 b_1 a_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_v = \dfrac{c_1 \cdot (a_1 b_2 + a_1 a_2) - (c_1 \cdot (a_2 + b_2) - a_2 \cdot b_1) \cdot a_1}{a_1 b_1 a_2}; \\ C_u = \dfrac{(c_1 \cdot (a_2 + b_2) - a_2 \cdot b_1) \cdot b_1 - c_1 \cdot b_1 b_2}{a_1 b_1 a_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_v = 1; \\ C_u = \dfrac{b}{a_1}. \end{cases}$$

Остаточно маємо

$$D_n = \left(1 + \frac{b}{a_1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \prod_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m} \right) \cdot \prod_{m=1}^{n} b_m, \quad D_n = \left(1 + \frac{c_1 - b_1}{a_1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \prod_{m=1}^{k} \frac{a_m}{b_m} \right) \cdot \prod_{m=1}^{n} b_m .$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.08.01.

$$a_n = n-1,\ \ b=1,\ \ b_n = 2n,\ c_n = 2n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 1 & 2n-1 & n-1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2n-3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\#\ \ D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix},\ \ \begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 13,\ D_n = (3n-1)\cdot D_{n-1} - 2\cdot(n-1)^2\cdot D_{n-2}, \\ D_3 = 80. \end{matrix}$$

$$D_n = 2n\cdot D_{n-1} + (n-1)!,\ \ D_n = 2^{n-1} n!\cdot\left(3 + \sum_{m=2}^{n}\frac{1}{2^{m-1} m}\right).$$

4.08.02.

$$a_n = n-1,\ \ b=1,\ \ b_n = 2n+1,\ c_n = 2n+2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+2 & n+1 & n & \cdots & 3 \\ 1 & 2n & n & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 2n-2 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\#\ \ D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix},\ \ \begin{matrix} D_1 = 4, \\ D_2 = 21,\ \ D_n = 3n\cdot D_{n-1} - (2n-1)\cdot(n-1)\cdot D_{n-2}, \\ D_3 = 149. \end{matrix}$$

$$D_n = (2n+1)\cdot D_{n-1} + (n-1)!,\ \ D_n = (2n+1)!!\cdot\left(\frac{4}{3} + \sum_{m=2}^{n}\frac{(m-1)!}{(2m+1)!!}\right).$$

4.08.03.

$$a_n = n,\ \ b=2,\ \ b_n = 2n-1,\ c_n = 2n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2 & 2n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 13, \\ D_3 = 77. \end{matrix}$$

$$D_n = (3n-1)\cdot D_{n-1} - n\cdot(2n-3)\cdot D_{n-2},$$

$$D_n = (2n-1)\cdot D_{n-1} + 2\cdot n!,$$

$$D_n = (2n-1)!!\cdot\left(3 + 2\sum_{m=2}^{n}\frac{m!}{(2m-1)!!}\right).$$

4.08.04.

$$a_n = n,\ b = 1,\ b_n = 2n+2,\ c_n = 2n+3,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+3 & n+1 & n & \cdots & 3 \\ 1 & 2n+1 & n & \cdots & 3 \\ 1 & 1 & 2n-1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 5, \\ D_2 = 32, \\ D_3 = 262. \end{matrix} \qquad D_n = (3n+2)\cdot D_{n-1} - 2n^2\cdot D_{n-2},$$

$$D_n = 2(n+1)\cdot D_{n-1} + n!,$$

$$D_n = 2^{n-1}(n+1)!\cdot\left(\frac{5}{2} + \sum_{m=2}^{n}\frac{1}{2^{m-1}(m+1)}\right).$$

4.08.05.

$$a_n = n+1,\ b = 1,\ b_n = 2n+1,\ c_n = 2n+2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+2 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & 2n & n-2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2n-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} D_1 = 4, \\ D_2 = 23, \\ D_3 = 173. \end{matrix} \qquad D_n = (3n+2)\cdot D_{n-1} - (2n-1)\cdot(n+1)\cdot D_{n-2},$$

$$D_n = (2n+1)\cdot D_{n-1} + \frac{(n+1)!}{2},$$

$$D_n = (2n+1)!!\cdot\left(\frac{4}{3} + \sum_{m=2}^{n}\frac{(m+1)!}{2\cdot(2m+1)!!}\right).$$

4.08.06.

$$a_n = n+1,\ b = 3,\ b_n = 2n,\ c_n = 2n+3,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+3 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 3 & 2n+1 & n-1 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 2n-1 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\# \ D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{matrix} D_1 = 5, \\ D_2 = 29, \\ D_3 = 210. \end{matrix} \quad D_n = (3n+1)\cdot D_{n-1} - 2\cdot\left(n^2-1\right)\cdot D_{n-2},$$

$$D_n = 2n\cdot D_{n-1} + 3\frac{(n+1)!}{2},\quad D_n = 2^{n-1}n!\cdot\left(5 + 3\cdot\sum_{m=2}^{n}\frac{m+1}{2^m}\right).$$

Приклад 4.09.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2+b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1 = a_1 + b_1$.

*2.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_2+b_2 & a_1 \\ b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_2 & -b_1 \\ b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - \frac{b_2}{b_1}\cdot II \to I \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2+b_2 & -b_1 \\ -\frac{a_1 b_2}{b_1} & a_1+b_1 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2) - a_1 b_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + b_1 a_2.$$

$$*3.\quad D_3=\begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2+b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I-II\to I \right| = \begin{vmatrix} a_3 & -b_2 & 0 \\ b_3 & a_2+b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-\dfrac{b_3}{b_2}\cdot II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & -b_2 & 0 \\ -\dfrac{a_2 b_3}{b_2} & a_2+b_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\left(a_3+b_3\right)\cdot D_2 - a_2\cdot b_3\cdot D_1 = b_3\cdot b_2\cdot b_1 + a_3\cdot b_2\cdot b_1 + a_3\cdot a_2\cdot b_1 + a_3\cdot a_2\cdot a_1 .$$

Загальний випадок.

$$*\text{n}.\ D_n=\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I-II\to I \right| =$$

$$=\begin{vmatrix} a_n & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I-\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\cdot II \to I \end{array} \right| =$$

$$=\begin{vmatrix} a_n-b_n & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{a_{n-1}b_n}{b_{n-1}} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left(a_n+b_n\right)\cdot D_{n-1} - a_{n-1}b_n\cdot D_{n-2}.$$

$$D_n=\left(a_n+b_n\right)\cdot D_{n-1} - a_{n-1}b_n\cdot D_{n-2}.$$

Застосуємо до рекурентної формули серію перетворень:

$$D_n - a_n\cdot D_{n-1} = b_n\cdot\left(D_{n-1} - a_{n-1}\cdot D_{n-2}\right).$$

Припустивши, що $Z_n = D_n - a_n \cdot D_{n-1}$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення першого порядку відносно варіанти Z_n. Задача Коші $\begin{cases} Z_n = b_n \cdot Z_{n-1}; \\ Z_2 = D_2 - a_2 \cdot D_1 = b_1 \cdot b_2 \end{cases}$ має розв'язок $Z_n = \prod_{m=1}^{n} b_m$. Звідси, $D_n = a_n \cdot D_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} b_m$. Припустимо, що $D_n = U_n \cdot \prod_{m=1}^{n} a_m$, тоді $U_1 = \frac{D_1}{a_1} = 1 + \frac{b_1}{a_1}$. Після підстановки рекурентне співвідношення зводиться до канонічного вигляду: $U_n = U_{n-1} + \prod_{m=1}^{n} \frac{b_m}{a_m}$. Таким чином, $U_n = U_1 + \sum_{j=2}^{n} \prod_{m=1}^{j} \frac{b_m}{a_m}$. Остаточно маємо

$$D_n = \left(1 + \frac{b_1}{a_1} + \sum_{j=2}^{n} \prod_{m=1}^{j} \frac{b_m}{a_m}\right) \cdot \prod_{m=1}^{n} a_m,\ D_n = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{m=1}^{j} \frac{b_m}{a_m}\right) \cdot \prod_{m=1}^{n} a_m.$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

4.09.01.

$$a_n = n,\quad b_n = n+1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2n+1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & 2n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n+1 & n & 2n-3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n+1 & n & n-1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 12, \\ D_3 = 60. \end{matrix}$ $D_n = (2n+1) \cdot D_{n-1} - (n^2 - 1) \cdot D_{n-2}$. $D_n = \frac{(n+2)!}{2}$.

4.09.02.

$$a_n = n,\quad b_n = 2n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 3n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 3n-4 & n-2 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 3n-7 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} D_1 = 2, \\ D_2 = 7, \\ D_3 = 36. \end{array}$$

$$D_n = (3n-1) \cdot D_{n-1} - (n-1) \cdot (2n-1) \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(2m-1)!!}{m!} \right) \cdot n!.$$

4.09.03.

$$a_n = 3n-2, \quad b_n = 2n-1,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 5n-3 & 3n-5 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 5n-8 & 3n-8 & \cdots & 1 \\ 2n-1 & 2n-3 & 5n-13 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} D_1 = 2, \\ D_2 = 11, \\ D_3 = 92. \end{array}$$

$$D_n = (5n-3) \cdot D_{n-1} - (3n-5) \cdot (2n-1) \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{m=1}^{j} \frac{2m-1}{3m-2} \right) \cdot \prod_{m=1}^{n} (3m-2).$$

4.09.04.

$$a_n = n, \quad b_n = n^2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2+n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2 & n^2-n & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2 & (n-1)^2 & n^2-3n+2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\# \quad D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 9 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} D_1 = 2, \\ D_2 = 8, \\ D_3 = 60. \end{array}$$

$$D_n = (n^2+n) \cdot D_{n-1} - (n-1) \cdot n^2 \cdot D_{n-2}.$$

$$D_n = \left(1 + \sum_{m=1}^{n} m! \right) \cdot n!.$$

4.09.05. $$a_n = 2n-1,\quad b_n = n^2,$$ $$D_n = = \begin{vmatrix} (n+1)^2-2 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n^2 & n^2-2 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-1)^2-2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ $\#\ D_3 = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \\ 9 & 4 & 2 \end{vmatrix},\ \begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 10, \\ D_3 = 86. \end{matrix}$ $D_n = \left(n^2+2n-1\right)\cdot D_{n-1} - (2n-3)\cdot n^2 \cdot D_{n-2}$. $D_n = \left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(m!)^2}{(2m-1)!!}\right)\cdot(2m-1)!!$.
4.09.06. $$a_n = n,\quad b_n = n^2+n,$$ $$D_n = = \begin{vmatrix} (n+1)^2-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2+n & n^2-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n^2+n & n^2-n & (n-1)^2-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^2+n & n^2-n & n^2-3n+2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$ $\#\ D_3 = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 1 \\ 12 & 8 & 1 \\ 12 & 6 & 3 \end{vmatrix},\ \begin{matrix} D_1 = 3, \\ D_2 = 18, \\ D_3 = 198. \end{matrix}$ $D_n = \left(n^2+2n\right)\cdot D_{n-1} - (n-1)\cdot\left(n^2+n\right)\cdot D_{n-2}$. $D_n = \left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}(m+1)!\right)\cdot n!$.

Приклад 4.10.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 2b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 2b_{n-2} & 2b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_3+a_2 & a_2+a_1 \\ 2b_2 & a_2+b_2 & a_2+a_1 \\ 2b_1 & 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розглянемо випадки, коли $n=1$, $n=2$ та $n=3$.

*1. $D_1 = a_1 + b_1$.

*2. $$D_2 = \begin{vmatrix} a_2+b_2 & a_2+a_1 \\ 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_2+b_2-2b_1 & a_2-b_1 \\ 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} b_2-b_1 & a_2-b_1 \\ b_1-a_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = (b_2-b_1)(a_1+b_1)-(b_1-a_1)(a_2-b_1).$$

$$D_2 = (b_2-b_1)(a_1+b_1)-(b_1-a_1)(a_2-b_1).$$

*3.

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_3+a_2 & a_2+a_1 \\ 2b_2 & a_2+b_2 & a_2+a_1 \\ 2b_1 & 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| = \begin{vmatrix} a_3+b_3-2b_2 & a_3-b_2 & 0 \\ 2b_2 & a_2+b_2 & a_2+a_1 \\ 2b_1 & 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| = \begin{vmatrix} b_3-b_2 & a_3-b_2 & 0 \\ b_2-a_2 & a_2+b_2 & a_2+a_1 \\ 0 & 2b_1 & a_1+b_1 \end{vmatrix} =$$

$$=(b_3-b_2)D_2-(b_2-a_2)\cdot(a_3-b_2)D_1.$$

Загальний випадок.

*n. $$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 2b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 2b_{n-2} & 2b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| I - II \to I \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_n+b_n-2b_{n-1} & a_n-b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 2b_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 2b_{n-2} & 2b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{елементарні перетворення} \\ \text{зі стовпцями:} \\ I - II \to I \end{array} \right| =$$

$$=\begin{vmatrix} b_n-b_{n-1} & a_n-b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 0 & 2b_{n-2} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(b_n-b_{n-1}\right)\cdot D_{n-1}-\left(a_n-b_{n-1}\right)\left(b_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}.$$

$$D_n=\left(b_n-b_{n-1}\right)\cdot D_{n-1}-\left(a_n-b_{n-1}\right)\left(b_{n-1}-a_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}.$$

Припустивши $p_n=a_n-b_{n-1}$ і $q_n=b_n-a_n$, отримаємо однорідне лінійне рекурентне співвідношення другого порядку

$$D_n=\left(p_n+q_n\right)\cdot D_{n-1}-p_nq_{n-1}\cdot D_{n-2}.$$

Застосуємо до рекурентної формули серію перетворень:

$$D_n-q_n\cdot D_{n-1}=p_n\cdot\left(D_{n-1}-q_{n-1}\cdot D_{n-2}\right).$$

Припустивши, що $Z_n=D_n-q_n\cdot D_{n-1}$, після підстановки дістанемо рекурентне співвідношення першого порядку $Z_n=p_n\cdot Z_{n-1}$. Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} Z_n=p_n\cdot Z_{n-1}; \\ Z_2=D_2-q_2\cdot D_1=\left(b_2-b_1\right)\left(a_1+b_1\right)-\left(b_1-a_1\right)\left(a_2-b_1\right)-\left(b_1-a_2\right)\left(a_1+b_1\right)=2a_1p_2. \end{cases}$$

$$Z_3=2a_1p_2p_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$Z_n=2a_1\cdot\prod_{m=2}^{n}p_m.$$

Звідси,

$$D_n-q_n\cdot D_{n-1}=2a_1\cdot\prod_{m=2}^{n}p_m \quad\Rightarrow\quad D_n=q_n\cdot D_{n-1}+2a_1\cdot\prod_{m=2}^{n}p_m.$$

Використовуючи формулу $D_n = \prod_{m=2}^{n} p(m) \cdot \left(D_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{g(k)}{\prod_{m=2}^{k} p(m)} \right)$, де $p(n) = q_n$, $g(n) = 2a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} p(m), D_1 = a_1 + b_1$, отримаємо $D_n = \left(D_1 + 2a_1 \cdot \sum_{j=2}^{n} \prod_{m=2}^{j} \frac{p_m}{q_m} \right) \cdot \prod_{m=2}^{n} q_m$.

Повернувшись до старих змінних $p_n = a_n - b_{n-1}$ і $q_n = b_n - a_n$, дістаємо, що розв'язок рекурентного співвідношення визначається формулою

$$D_n = \left(a_1 + b_1 + 2a_1 \cdot \sum_{j=2}^{n} \prod_{m=2}^{j} \frac{a_m - b_{m-1}}{b_m - a_m} \right) \cdot \prod_{m=2}^{n} (b_m - a_m).$$

Якщо варіанта b_n стала $(b_n = b)$, то рекурентне співвідношення $D_n = (b_n - b_{n-1}) \cdot D_{n-1} - (a_n - b_{n-1})(b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot D_{n-2}$ приймає вигляд

$$D_n = (a_{n-1} - b) \cdot (a_n - b) \cdot D_{n-2}.$$

Отримане співвідношення еквівалентне двом співвідношенням:

$$\left[\begin{array}{l} D_{2n+1} = (a_{2n} - b) \cdot (a_{2n+1} - b) \cdot D_{2n-1}; \\ D_{2n} = (a_{2n-1} - b) \cdot (a_{2n} - b) \cdot D_{2n-2}. \end{array} \right.$$

Звідки дістаємо розв'язки

$$\left[\begin{array}{l} D_{2n+1} = (a_1 + b) \cdot \prod_{m=2}^{2n+1} (a_m - b); \\ D_{2n} = \prod_{m=1}^{2n} (a_m - b). \end{array} \right.$$

Розглянемо ще два окремих випадки, коли варіанта $a_n \neq const$.

*1. $b_n = a_n$. $D_n = \begin{vmatrix} 2a_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ 2a_{n-2} & 2a_{n-2} & 2a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2a_1 & 2a_1 & 2a_1 & \cdots & 2a_1 \end{vmatrix}$.

$D_n = (a_n - a_{n-1}) \cdot D_{n-1}$.

$$\# \quad D_n = 2a_1 \prod_{m=2}^{n} \left(a_m - a_{m-1}\right).$$

*2. $b_n = a_{n+1}$. $D_n = \begin{vmatrix} a_{n+1}+a_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 2a_n & a_n+a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ 2a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1}+a_{n-2} & \cdots & a_2+a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2a_2 & 2a_2 & 2a_2 & \cdots & a_2+a_1 \end{vmatrix}$.

$D_n = \left(a_{n+1} - a_n\right) \cdot D_{n-1}$.

$$\# \quad D_n = \left(a_2 + a_1\right) \prod_{m=2}^{n} \left(a_{m+1} - a_m\right).$$

Вправи

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

<table>
<tr><td>

4.10.01.

$$a_n = n-1, \quad b_n = n, \quad D_n = \begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-2 & 2n-3 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ 2n-4 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$\# \; D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 1. \end{matrix}$ $D_n = D_{n-1}$. $D_n = 1$.

</td></tr>
<tr><td>

4.10.02.

$$a_n = 2an + \frac{b}{2}, \quad b_n = 2an + a + \frac{b}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 4an+a+b & 4an-2a+b & \cdots & 6a+b \\ 4an-2a+b & 4an-3a+b & \cdots & 6a+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6a+b & 6a+b & \cdots & 5a+b \end{vmatrix}.$$

$\# \; D_3 = \begin{vmatrix} 13a+b & 10a+b & 6a+b \\ 10a+b & 9a+b & 6a+b \\ 6a+b & 6a+b & 5a+b \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 5a+b, \\ D_2 = a \cdot \left(9a+2b\right), \\ D_3 = a^2 \left(13a+3b\right). \end{matrix}$ $D_n = 2a \cdot D_{n-1} - a^2 \cdot D_{n-2}$.

$D_n = a^{n-1}\left(4na + a + nb\right)$.

</td></tr>
</table>

4.10.03.

$$a_n = an - a + \frac{b}{2}, \quad b_n = an + a + \frac{b}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2an+b & 2an-3a+b & \cdots & a+b \\ 2an+b & 2an-2a+b & \cdots & a+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4a+b & 4a+b & \cdots & 2a+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 6a+b & 3a+b & a+b \\ 6a+b & 4a+b & a+b \\ 4a+b & 4a+b & 2a+b \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2a+b, \\ D_2 = a\cdot(4a+2b), \\ D_3 = a^2(8a+3b). \end{matrix}$ $D_n = a\cdot D_{n-1} + 2a^2\cdot D_{n-2}$.

$D_n = \dfrac{1}{3a}\cdot\left[(3a+b)\cdot(2a)^n - b\cdot(-1)^n\right]$.

4.10.04.

$$a_n = 3an + \frac{b-a}{2}, \quad b_n = 2an + \frac{b+a}{2},$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 5an+b & 6an-4a+b & \cdots & 8a+b \\ 4an-3a+b & 5an-5a+b & \cdots & 8a+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5a+b & 5a+b & \cdots & 5a+b \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 15a+b & 14a+b & 8a+b \\ 9a+b & 10a+b & 8a+b \\ 5a+b & 5a+b & 5a+b \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 5a+b, \\ D_2 = 2a\cdot(5a+b), \\ D_3 = 8a^2(5a+b). \end{matrix}$

$D_n = 2a\cdot D_{n-1} + a^2(n-2)\cdot(n+1)\cdot D_{n-2}$. $D_n = (-a)^{n-1}(5a+b)\cdot(n-1)!\cdot\sum\limits_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\cdot\dfrac{m+m^2}{2}$.

4.10.05.

$$a_n = n, \quad b_n = n^2,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} n^2+n & 2n-1 & \cdots & 3 \\ 2(n-1)^2 & n^2-n & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $D_3 = \begin{vmatrix} 12 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 6, \\ D_3 = 34. \end{matrix}$ $D_n = (2n-1)\cdot D_{n-1} + (n^2-3n+1)(n^2-3n+2)\cdot D_{n-2}$.

$D_n = \left(2 + 2\cdot\sum\limits_{j=2}^{n}\prod\limits_{m=2}^{j}\dfrac{3m-m^2-1}{m\cdot(m-1)}\right)\cdot n!\cdot(n-1)!$.

4.10.06. $$a_n = n^2 - n, \quad b_n = n^2,$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n^2 - n & 2(n-1)^2 & \cdots & 2 \\ 2(n-1)^2 & 2n^2 - 5n + 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 2, \\ D_3 = 6. \end{matrix}$ $D_n = (2n-1) \cdot D_{n-1} - (n-1)^2 \cdot D_{n-2}$. $D_n = n!$.
4.10.07. $$a_n = n^2 - \frac{1}{2}, \quad b_n = n^2 + \frac{1}{2},$$ $$D_n = \begin{vmatrix} 2n^2 & 2(n-1) \cdot n & \cdots & 4 \\ 2(n-1)^2 + 1 & 2(n-1)^2 & \cdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 18 & 12 & 4 \\ 9 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 2, \\ D_2 = 4, \\ D_3 = 12. \end{matrix}$ $D_n = (2n-1) \cdot D_{n-1} - 2 \cdot (n-1) \cdot D_{n-2}$. $D_n = D_{n-1} + 2^{n-1} \cdot (n-1)!$. $D_n = 2 + \sum_{m=2}^{n} 2^{m-1} \cdot (m-1)!$.
4.10.08. $$a_n = \frac{n^2 - n}{2}, \quad b_n = \frac{n^2 - n + 2}{2},$$ $$D_n = \begin{vmatrix} n^2 - n + 1 & n^2 - 2n + 1 & \cdots & 1 \\ n^2 - 3n + 4 & n^2 - 3n + 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$ # $D_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{matrix} D_1 = 1, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = 1. \end{matrix}$ $D_n = (n-1) \cdot D_{n-1} - (n-2) \cdot D_{n-2}$. $D_n = 1$.

§ 5. Перегляд розглянутих прикладів

Метод рекурентних співвідношень

1.01.

Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{cases} D_n = a_n \cdot D_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} b_m; \\ D_1 = a_1 + b_1. \end{cases} \begin{cases} \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} + \prod\limits_{m=1}^{n} b_m; \\ \Delta_1 = a_1 + b_1. \end{cases}$$

1.02.

Обчислити визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & 1 & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (1-a)D_{n-1}$, $D_1 = 1$, $D_n = (1-a)^{n-1}$.

1.03.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 & a_3 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = \prod_{m=1}^{n} b_m \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}\right)$..

У випадку, коли $b_1 = 0$ визначник можна обчислити методом зведення до трикутного вигляду. Значення цього визначника дорівнює $D_n = a_1 \cdot \prod_{m=2}^{n} b_m$.

Лінійні рекурентні співвідношення другого порядку

2.01.

Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_n + b_n & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\begin{cases} D_n = \left(a_n + b_n\right) \cdot D_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot D_{n-2}, \\ D_1 = a_1 + b_1, \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_1 \\ b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta_n = \left(a_n + b_n\right) \cdot \Delta_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot \Delta_{n-2}, \\ \Delta_1 = a_1 + b_1, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & a_1 \\ b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix} \end{cases}.$

2.02.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\begin{cases} D_n = (a_n+b_n)\cdot D_{n-1} - a_n\cdot b_n\cdot D_{n-2}, \\ D_1 = a_1+b_1, \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_2+b_2 & a_2 \\ b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta_n = (a_n+b_n)\cdot \Delta_{n-1} - a_n\cdot b_n\cdot \Delta_{n-2}, \\ \Delta_1 = a_1+b_1, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2+b_2 & a_2 \\ b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix} \end{cases}.$

2.03. Довести тотожність.

$$\begin{vmatrix} 2 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & 2 & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & 2 & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 2 & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

\# $\begin{cases} D_n = 2\cdot D_{n-1} - a\cdot b\cdot D_{n-2}, \\ D_1 = 2, \\ D_2 = 4-ab. \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta_n = 2\cdot \Delta_{n-1} - a\cdot b\cdot \Delta_{n-2}, \\ \Delta_1 = 2, \\ \Delta_2 = 4-ab. \end{cases}.$

2.04. Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ b^2 & a+b & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b^3 & b^2 & a+b & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ b^2 & a+b & a^2 & \cdots & 0 \\ 0 & b^2 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^2 \\ b^2 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^2b^2\cdot D_{n-2}$

2.05.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & a^{2n-5} \\ b^3 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & a^{2n-7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-3} & b^{2n-5} & b^{2n-7} & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} & a \\ b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot D_{n-1} - ab\cdot D_{n-2}$

2.06.

Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} a+b & a^3 & a^5 & \cdots & a^{2n-1} \\ b^3 & a+b & a^3 & \cdots & a^{2n-3} \\ b^5 & b^3 & a+b & \cdots & a^{2n-6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{2n-1} & b^{2n-3} & b^{2n-5} & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a^3 & 0 & \cdots & 0 \\ b^3 & a+b & a^3 & \cdots & 0 \\ 0 & b^3 & a+b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = a+b = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a^3 \\ b^3 & a+b \end{vmatrix} = D_2$. $D_n = (a+b)\cdot D_{n-1} - a^3b^3\cdot D_{n-2}$

2.07.

Нехай параметри a, b, p та q задовольняють умові $ab = pq$. Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} c & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ q & c & p & \cdots & p^{n-2} \\ q^2 & q & c & \cdots & p^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = c = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c & p \\ q & c \end{vmatrix} = c^2 - pq = c^2 - ab = \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} = D_2$.

$$D_n = \left(c - 2\cdot ab + ab\cdot c\right)\cdot D_{n-1} - ab\cdot\left(1-c\right)^2\cdot D_{n-2} =$$
$$= \left(c - 2\cdot pq + pq\cdot c\right)\cdot D_{n-1} - pq\cdot\left(1-c\right)^2\cdot D_{n-2} = \Delta_n .$$

2.08.

Нехай параметри a, b, p та q задовольняють умові $ab = pq$. Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} c_n & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c_{n-1} & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c_{n-2} & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & p & p^2 & \cdots & p^{n-1} \\ q & c_{n-1} & p & \cdots & p^{n-2} \\ q^2 & q & c_{n-2} & \cdots & p^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & p \\ q & c_1 \end{vmatrix} = c_1\cdot c_2 - pq = c_1\cdot c_2 - ab = \begin{vmatrix} c_2 & a \\ b & c_1 \end{vmatrix} = D_2$.

$$D_n = \left(c_n - 2\cdot ab + ab\cdot c_{n-1}\right)\cdot D_{n-1} - ab\cdot\left(1-c_{n-1}\right)^2\cdot D_{n-2}.$$
$$\Delta_n = \left(c_n - 2\cdot pq + pq\cdot c_{n-1}\right)\cdot \Delta_{n-1} - pq\cdot\left(1-c_{n-1}\right)^2\cdot \Delta_{n-2} =$$
$$= \left(c_n - 2\cdot ab + ab\cdot c_{n-1}\right)\cdot \Delta_{n-1} - ab\cdot\left(1-c_{n-1}\right)^2\cdot \Delta_{n-2}.$$

2.09.

Нехай параметри a_n, b_n, p_n та q_n задовольняють умові $a_nb_n = p_nq_n$. Довести тотожність, не обчислюючи визначники.

$$\begin{vmatrix} c_n & a_{n-1}b_n & a_{n-2}b_n & \cdots & a_1b_n \\ a_nb_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1} & \cdots & a_1b_{n-1} \\ a_nb_{n-2} & a_{n-1}b_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & a_1b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_{n-1}b_1 & a_{n-2}b_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & p_{n-1}q_n & p_{n-2}q_n & \cdots & p_1q_n \\ p_nq_{n-1} & c_{n-1} & p_{n-2}q_{n-1} & \cdots & p_1q_{n-1} \\ p_nq_{n-2} & p_{n-1}q_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & p_1q_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_nq_1 & p_{n-1}q_1 & p_{n-2}q_1 & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

\# $\Delta_1 = c_1 = D_1$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & p_1q_2 \\ p_2q_1 & c_1 \end{vmatrix} = c_1c_2 - p_1p_2q_1q_2 = c_1c_2 - a_1a_2b_1b_2 = \begin{vmatrix} c_2 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & c_1 \end{vmatrix} = D_2,$$

$$D_n = \left(c_n - 2a_nb_n + c_{n-1}\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}\right)\cdot D_{n-1} - \frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}\cdot\left(a_{n-1}b_{n-1} - c_{n-1}\right)^2\cdot D_{n-2}$$

2.10.

Довести тотожність, якщо $a_n \neq 0$ та $b_n \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} c_n & \frac{a_{n-1}}{a_n}x & \frac{a_{n-2}}{a_n}x & \cdots & \frac{a_1}{a_n}x \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-1}}x \\ \frac{a_n}{a_{n-2}}y & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{a_1}{a_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_1}y & \frac{a_{n-1}}{a_1}y & \frac{a_{n-2}}{a_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_n & \frac{b_{n-1}}{b_n}x & \frac{b_{n-2}}{b_n}x & \cdots & \frac{b_1}{b_n}x \\ \frac{b_n}{b_{n-1}}y & c_{n-1} & \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}x & \cdots & \frac{b_1}{b_{n-1}}x \\ \frac{b_n}{b_{n-2}}y & \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}y & c_{n-2} & \cdots & \frac{b_1}{b_{n-2}}x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{b_n}{b_1}y & \frac{b_{n-1}}{b_1}y & \frac{b_{n-2}}{b_1}y & \cdots & c_1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = (c_n + c_{n-1} - x - y)\cdot D_{n-1} - (x - c_{n-1})\cdot(y - c_{n-1})\cdot D_{n-2}$.

Ми отримали однорідне лінійне рекурентне співвідношення другого порядку. Варіанти a_n b_n не присутні в цьому співвідношенні, тому $\Delta_n = (c_n + c_{n-1} - x - y)\cdot \Delta_{n-1} - (x - c_{n-1})\cdot(y - c_{n-1})\cdot \Delta_{n-2}$. Рекурентні співвідношення співпадають. Співпадають і початкові умови: $\Delta_1 = c_1 = D_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & \frac{b_1}{b_2}x \\ \frac{b_1}{b_2}y & c_1 \end{vmatrix} = c_1c_2 - xy = \begin{vmatrix} c_2 & \frac{a_1}{a_2}x \\ \frac{a_2}{a_1}y & c_1 \end{vmatrix} = D_2$. Таким чином, варіанти D_n та Δ_n співпадають. $D_n = \Delta_n$.

2.11.

Задані визначники:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 \\ c_{n-2} & c_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_1 & c_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ q_{n-1} & a_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ q_{n-2} & q_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & p_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Нехай $\vec{U} = (u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})-$ довільний керуючий вектор, елементи якого приймають значення нуль або одиниця. Крім того, для будь-якого $s = 1, 2, \cdots, n-1$, мають місце рівності $\begin{cases} p_s = b_s,\, q_s = c_s, \text{ якщо } u_s = 0; \\ p_s = c_s,\, q_s = b_s, \text{ якщо } u_s = 1. \end{cases}$ Довести, що $D_n = \Delta_n$.

Рекурентні співвідношення другого порядку зі сталими коефіцієнтами

3.01.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} z & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & z & x & \cdots & 0 \\ 0 & y & z & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} z & x & 0 \\ y & z & x \\ 0 & y & z \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} (x \neq y), \\ (z \neq x + y). \end{matrix}.$$

\# $D_n = z \cdot D_{n-1} - xy \cdot D_{n-2}, \quad D_n = (a+b) \cdot D_{n-1} - ab \cdot D_{n-2}.$

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, \quad a+b = z, ab = xy.$$

3.02.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & a & \cdots & y \\ a & 2a & a & \cdots & y \\ a & a & 2a & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2a & a & y \\ a & 2a & y \\ x & x & z \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = a^{n-2} \cdot \left(D_2 + (D_2 - a \cdot D_1) \cdot (n-2)\right), \; D_n = a^{n-2} \cdot \left((az - xy)n + xy\right).$

3.03.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & a & a & \cdots & y \\ b & \frac{a+b}{2} & a & \cdots & y \\ b & b & \frac{a+b}{2} & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & a & y \\ b & \frac{a+b}{2} & y \\ x & x & z \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 D_{n-2}.$

$$D_{2k} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k-2} \cdot D_2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k-2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} z - xy\right)$$

$$D_{2k+1} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k} \cdot D_1 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2k} \cdot z$$

3.04.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a & \cdots & y \\ b & a+b & 2a & \cdots & y \\ 0 & b & a+b & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a+b & 2a & y \\ b & a+b & y \\ 0 & x & z \end{vmatrix}, \quad (b \neq 0).$$

\# $D_n = a \cdot D_{n-1} - b(a-b) \cdot D_{n-2}$,

Якщо корені характеристичного рівняння різні $(a \neq 2b)$, то

$$D_n = \frac{b^{n-1} \cdot \left(D_2 - (a-b) \cdot D_1\right) - (a-b)^{n-1} \cdot \left(D_2 - b \cdot D_1\right)}{2b-a},$$

$$D_n = \frac{b^{n-1}(2bz - xy) - (a-b)^{n-1}(az - xy)}{2b-a}.$$

Якщо корені характеристичного рівняння рівні $(a = 2b)$, то

$$D_n = a^{n-2} \cdot \left(D_2 + (n-2)(D_2 - a \cdot D_1)\right),$$

$$D_n = a^{n-2}\left(az - bz + xy + n(bz - xy)\right).$$

3.05.

Варіанта a_n задана рекурентною формулою: $a_n = a_{n-1} + a$. Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & y \\ a_n + a_{n-1} & 2a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & y \\ a_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-1} + a_{n-2} & 2a_{n-2} & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & z \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2a_3 & a_3 + a_2 & y \\ a_3 + a_2 & 2a_2 & y \\ x & x & z \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = -(a_n - a_{n-1})^2 \cdot D_{n-2} = -a^2 \cdot D_{n-2}$,

$D_{2k} = (-1)^{k+1} a^{2k-2} D_2 = (-1)^{k+1} a^{2k-2}(2a_2 z - xy)$,

$D_{2k+1} = (-1)^k a^{2k} D_1 = (-1)^k a^{2k} z$.

3.06.

Нехай варіанти a_n і b_n такі, що $\begin{cases} a_n - b_{n-1} = c, \\ b_n - a_{n-1} = d \end{cases}$. Показати, що визначник

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_{n-1} + b_{n-2} & b_{n-1} + b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}$$

задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку зі сталими коефіцієнтами $D_n = -c \cdot d \cdot D_{n-2}$. Отримати його значення в явному вигляді.

\# $D_n = -cd \cdot D_{n-2}$,

$D_{2k} = (-1)^k c^k d^k$, $D_{2k+1} = (-1)^k c^k d^k (a_1 + b_1)$.

3.07.

Нехай варіанти a_n і b_n такі, що $\begin{cases} a_n - a_{n-1} = c, \\ b_n - b_{n-1} = d \end{cases}$. Показати, що визначник

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_n + a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_{n-1} + a_{n-2} & b_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix}$$

задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку зі сталими коефіцієнтами $D_n = -c \cdot d \cdot D_{n-2}$. Отримати його значення в явному вигляді.

\# $D_n = -cd \cdot D_{n-2}$, $D_{2k} = (-1)^k c^k d^k$, $D_{2k+1} = (-1)^k c^k d^k (a_1 + b_1)$.

3.08.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} 12n+11 & 12n+5 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 12n & 12n-1 & 12n-7 & \cdots & 29 \\ 12n-12 & 12n-12 & 12n-13 & \cdots & 29 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 24 & 24 & 24 & \cdots & 23 \end{vmatrix}, \ D_3 = \begin{vmatrix} 47 & 41 & 29 \\ 36 & 35 & 29 \\ 24 & 24 & 23 \end{vmatrix},$$

$D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 6 \cdot D_{n-2}, \qquad D_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$

$$\begin{cases} D_1 = 3A + 2B = 23; \\ D_2 = 9A + 4B = 109, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 21; \\ B = -20. \end{cases}.$$

$D_n = 21 \cdot 3^n - 20 \cdot 2^n$. Контрольна точка: $D_3 = 21 \cdot 3^3 - 20 \cdot 2^3 = 21 \cdot 27 - 20 \cdot 8 = 407$
.

3.09.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} c & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ b & c & a & \cdots & a^{n-2} \\ b^2 & b & c & \cdots & a^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \cdots & c \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} c & a & a^2 \\ b & c & a \\ b^2 & b & c \end{vmatrix}.$$

$D_n = (c - 2ab + abc) \cdot D_{n-1} - ab(1-c)^2 \cdot D_{n-2}$.

Рекурентні співвідношення зі змінними коефіцієнтами

4.01.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 & 0 \\ b_2 & a_2 + b_2 & a_2 \\ 0 & b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = b_n \cdot D_{n-1} + (D_2 - b_2 \cdot D_1) \cdot \prod_{m=3}^{n} a_m, \; D_n = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{m=1}^{j} \frac{a_m}{b_m}\right) \cdot \prod_{m=1}^{n} b_m.$

4.02.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_{n-1} + b & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & b & a_{n-2} + b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 + b \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b & a_3 & 0 \\ b & a_2 + b & a_2 \\ 0 & b & a_1 + b \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (a_n + b) \cdot D_{n-1} - a_n b \cdot D_{n-2}, \ D_n = b^n \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{m=1}^{k} a_m}{b^k} \right).$

4.03.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a + b_n & a & 0 & \cdots & 0 \\ b_{n-1} & a + b_{n-1} & a & \cdots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a + b_1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a + b_3 & a & 0 \\ b_2 & a + b_2 & a \\ 0 & b_1 & a + b_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (a + b_n) \cdot D_{n-1} - a b_{n-1} \cdot D_{n-2}, \ D_n = \prod_{m=1}^{n} b_m \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{\prod_{m=1}^{k} b_m} \right).$

4.04.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ b_{n-1} + b_{n-2} & b_{n-1} + b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + a_2 & a_2 + a_1 \\ b_3 + b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 & b_2 + b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = -\left(a_n - b_{n-1}\right)\cdot\left(b_n - a_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}$,

$$D_{2k+1} = \left(-1\right)^k \cdot \left(a_1 + b_1\right)\cdot \prod_{m=1}^{k}\left(a_{2m+1} - b_{2m}\right)\cdot\left(b_{2m+1} - a_{2m}\right),$$

$$D_{2k} = \left(-1\right)^k \cdot \prod_{m=1}^{k}\left(a_{2m} - b_{2m-1}\right)\cdot\left(b_{2m} - a_{2m-1}\right).$$

4.05.

Показати, що визначник

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_n + a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ b_{n-1} + a_{n-2} & b_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_3 + a_2 & a_2 + b_2 & a_2 + b_1 \\ b_2 + a_1 & b_2 + a_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку $D_n = -\left(a_n - a_{n-1}\right)\cdot\left(b_n - b_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}$. Отримати його значення.

$D_n = -\left(a_n - a_{n-1}\right)\cdot\left(b_n - b_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}$,

$$D_{2k} == \left(-1\right)^k \prod_{m=1}^{k}\left(a_{2m} - a_{2m-1}\right)\left(b_{2m} - b_{2m-1}\right),$$

$$D_{2k+1} = \left(-1\right)^k \left(a_1 + b_1\right)\prod_{m=1}^{k}\left(a_{2m+1} - a_{2m}\right)\left(b_{2m+1} - b_{2m}\right).$$

4.06.

Показати, що визначник

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 2b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ 2b_{n-2} & 2b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 & 0 \\ 2b_2 & a_2 + b_2 & a_2 \\ 2b_1 & 2b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}$ задовольняє рекурентному співвідношенню другого порядку $D_n = b_n \cdot D_{n-1} - a_n \cdot \left(b_{n-1} - a_{n-1}\right)\cdot D_{n-2}$. Отримати його значення.

$D_n = \left(1 + 2\cdot\sum_{j=1}^{n}\prod_{m=1}^{j}\frac{a_m}{b_m - a_m}\right)\cdot\prod_{m=1}^{n}\left(b_m - a_m\right)$. Якщо $a_1 = 0$, то $D_n = \prod_{m=1}^{n}\left(b_m - a_m\right)$.

4.07.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & a-b_{n-1} & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ a-c & a & a-b_{n-2} & \cdots & a-b_1 \\ a-c & a-c & a & \cdots & a-b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-c & a-c & a-c & \cdots & a \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a & a-b_2 & a-b_1 \\ a-c & a & a-b_1 \\ a-c & a-c & a \end{vmatrix}.$$

$D_n = \left(b_{n-1} + c\right)\cdot D_{n-1} - b_{n-1}\cdot c\cdot D_{n-2},\ D_n = \left(a + \left(a - c\right)\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{m=1}^{j}\frac{b_m}{c^m}\right)\cdot c^{n-1}.$

4.08.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1}-a_n & c_{n-2}-a_{n-1} & \cdots & c_1-a_2 \\ b & c_{n-1} & c_{n-2}-a_{n-1} & \cdots & c_1-a_2 \\ b & b & c_{n-2} & \cdots & c_1-a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & c_1 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} c_3 & c_2-a_3 & c_1-a_2 \\ b & c_2 & c_1-a_2 \\ b & b & c_1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = \left(1 + \frac{c_1 - b_1}{a_1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\prod_{m=1}^{k}\frac{a_m}{b_m}\right)\cdot\prod_{m=1}^{n} b_m,\ b_n = c_n - b.$

4.09.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n+b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ b_n & b_{n-1} & a_{n-2}+b_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_1+b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3+b_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & a_2+b_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & a_1+b_1 \end{vmatrix}.$$

$D_n = \left(a_n + b_n\right)\cdot D_{n-1} - a_{n-1}\cdot b_n\cdot D_{n-2},\quad D_n = \left(1 + \sum_{j=1}^{n}\prod_{m=1}^{j}\frac{b_m}{a_m}\right)\cdot\prod_{m=1}^{n} a_m.$

4.10.

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень.

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n + b_n & a_n + a_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ 2b_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ 2b_{n-2} & 2b_{n-2} & a_{n-2} + b_{n-2} & \cdots & a_2 + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 & \cdots & a_1 + b_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_3 + b_3 & a_3 + a_2 & a_2 + a_1 \\ 2b_2 & a_2 + b_2 & a_2 + a_1 \\ 2b_1 & 2b_1 & a_1 + b_1 \end{vmatrix}.$$

\# $D_n = (b_n - b_{n-1}) \cdot D_{n-1} - (a_n - b_{n-1})(b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot D_{n-2}$,

$$D_n = \left(a_1 + b_1 + 2a_1 \cdot \sum_{j=2}^{n} \prod_{m=2}^{j} \frac{a_m - b_{m-1}}{b_m - a_m} \right) \cdot \prod_{m=2}^{n} (b_m - a_m).$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беклемишев Д. В. Дополнительнительные главы алгебры / Д. В. Беклемишев. — М. : Наука, 1983. — 335 с.

2. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие: в 2 т. / Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян [и др.] / под ред. Ю. Л. Геворкяна. — Харьков : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. — 408 с.

3. Вища математика у прикладах і задачах: у 2 т. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.]; за ред. Л. В. Курпи. — Харків: НТУ «ХПІ», 2009. — 532 с.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 547 с.

5. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. — М. : Наука, 1971. — 280 с.

6. Геворкян Ю. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования: общий курс высшей математики: в 2-ч т. / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев. — Т. 1. — Харьков: НТУ «ХПИ», 2010. — 652 с.

7. Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв’язання : навч.-метод. посібник / Л. П. Дзюбак, С. П. Іглін, Г. Б. Ліннік, І. О. Морачковська. — Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. — 240 с.

8. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Наука, 1984. — 294 с.

9. Канатников А. Н. Аналитическая геометрия / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. — М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 400 с.

10. Канатников А. Н. Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко – М. : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 378 с.

11. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1968. — 431 с.

12. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М. : Наука, 1974. — 384 с.

13. Фаддеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — М. : Наука, 1977. — 307 с.

14. Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. — М. : Физматгиз, 1963. — 734 с.

15. Чарін В.С. Лінійна алгебра / В. С. Чарін. — К. : Техніка, 2004. — 415 с.

Навчальне видання

СЕРДЮК Ірина Василівна
АХІЄЗЕР Олена Борисівна
ДУНАЄВСЬКА Ольга Ігорівна

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ РЕКУРЕНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ N-го ПОРЯДКУ

Навчальний посібник
для студентів напрямків підготовки
«Прикладна математика» та «Комп’ютерні науки»

За загальною редакцією Мітіна Володимира Миколаєвича

Роботу до видання рекомендував М.І.Безменов

Редактор М.П.Єфремова

План 2018р., поз. 122

Підп. до друку ________. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 10.875.
Наклад 50 прим. Зам. № ________. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

Виготовлювач